

文章编号: 1007-5321(2005)02-0016-05

# 多腔 FP 滤波器实现 Butterworth 滤波的数学模型

齐永兴, 陈树强, 刘元安, 高泽华, 钱宗珏

(北京邮电大学 电信工程学院, 北京 100876)

**摘要:** 从功率传输函数出发, 利用巴特沃思(Butterworth)型滤波器的性质对 FP(fabary-perot)滤波器进行优化设计, 给出了一腔、二腔和三腔的数学模型及仿真结果, 设计出了具有巴特沃思滤波性质的多腔 FP 滤波器, 这是一种临界状态的滤波器。FP 滤波器在腔的个数上有所增加, 而且也使得滤波性能得到了大幅度的提高。在构建了所分析 FP 滤波器的各个镜面参数之间的数学关系的同时, 也预见了更多腔时各参数之间的关系。

**关 键 词:** FP 滤波器; 巴特沃思滤波器; 传输函数

中图分类号: TN713.5 文献标识码: A

## The Mathematical Model of Designing Multi-Cavity FP Filter with Butterworth Filtering

QI Yong-xing, CHEN Shu-qiang, LIU Yuan-an, GAO Ze-hua, QIAN Zong-jue

(School of Telecommunication Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract:** Based on the power transmission and the properties of Butterworth filter, it achieves a class of FP filters with Butterworth filtering for multi-mirror FP filter. It constructs a mathematical model of several cavities FP filter to implement the Butterworth filtering, and attains their critical conditions. Further more, this paper foresees the mathematical relationships of parameters of mirrors in condition of more cavities, so simplifies the design of multi-cavity FP filters with high performance, and presents a practical method and solutions to design a FP filter with more cavities.

**Key words:** fabary-perot filter; Butterworth filter; transmission

## 0 概述

滤波器的作用是将所测量信号中不感兴趣的频率滤除, 以保证所测数据精确。滤波器一般分为 2 类: 经典滤波器和现代滤波器, 且每一种都有模拟滤波器(AF)和数字滤波器(DF)2 种类型。就模拟而言, 理想滤波器物理上是不可实现的, 因此, 出现了各种向理想滤波器逼近的类型: 巴特沃思(Butterworth)型滤波器、切比雪夫 I 型滤波器、切

比雪夫 II 型滤波器和椭圆滤波器等。这几种滤波器各有优缺点, 如巴特沃思型滤波器平坦度较好, 但需要较高阶才能实现迅速滚降; 切比雪夫型滤波器虽滚降速度快, 但平坦度没有巴特沃思型滤波器好。正是因为巴特沃思型滤波器的阶数较高时有着良好的平顶陡边性能, 故在现实的设计中以巴特沃思型滤波器逼近为多, FP 滤波器的设计也不例外<sup>[1~5]</sup>。将具有巴特沃思滤波特性时 FP 所处的状态称之为临界状态, 在临界状态下 FP 滤波器腔的个数越多, 滤

波器的阶数也越高. 因此, 在相同的腔长条件下腔数多的FP滤波器比腔数少的滤波器的滤波性能要好<sup>[3]</sup>. 这使得多腔FP滤波器临界状态时各参数之间的关系显得尤为重要.

本文利用功率传输函数, 推导出了FP滤波器一腔、二腔和三腔的具有巴特沃思滤波性质的实现条件. 为了便于推导, 假定各个腔长的光程对中心波长近似相等.

## 1 临界条件

### 1) 一腔 FP 滤波器

如图1所示.

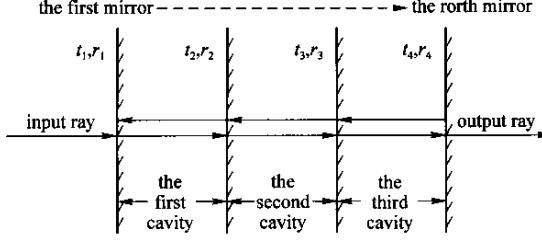


图1 三腔FP滤波器示意图

2 镜之间的空腔成为FP滤波器的腔, 其中 $r_1$ 、 $r_2$ 和 $t_1$ 、 $t_2$ 分别是第1、第2镜的反射系数和传输系数. 一腔FP滤波器的功率传输系数<sup>[2,6]</sup>为

$$T(\phi_1) = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(2\phi_1)} \quad (1)$$

其中,  $\phi$ 为第1和第2镜之间的相位延迟. 由于功率传输系数为周期函数, 可以进行低通巴特沃思型逼近(若为带通则只需要进行带通映射即可). 根据巴特沃思滤波器的性质可知, 若

$$\begin{cases} r_1 r_2 < 0 \\ T(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

则此FP滤波器符合巴特沃思型滤波要求. 将式(1)代入式(2)中, 当 $\phi_1 \ll 1$ 时, 可以得到 $r_1$ 、 $r_2$ 之间的密切关系

$$r_1 + r_2 = 0 \quad (3)$$

式(3)称为具有巴特沃思滤波的一腔FP滤波器临界条件, 简称一腔临界条件. 将式(3)代入式(1)得到临界条件下一腔FP滤波器的功率传输系数

$$T(\phi_1) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2r_1 \sin \phi_1}{1 - r_1^2}\right)^2} \quad (4)$$

显然, 只要满足临界条件, 此FP滤波器即为巴特沃思型(低通).

### 2) 二腔 FP 滤波器

二腔滤波器的功率传输系数<sup>[2,6]</sup>为

$$T = tt^* = t_1^2 t_2^2 t_3^2 / D_3 \quad (5)$$

$$\text{其中: } D_3 = 1 + (r_1 r_2)^2 + (r_2 r_3)^2 + (r_1 r_3)^2 + 2r_1 r_2 (1 + r_3^2) \cos(2\phi_1) + 2r_2 r_3 (1 + r_1^2) \cos(2\phi_2) + 2r_1 r_3 \cos(2\phi_1 + \phi_2) + 2r_1 r_2^2 r_3 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) \quad (6)$$

根据假设,  $\phi_i = \phi_j = \pi f / (\text{FSR}_i)^{-1}$ , 当满足 $f \ll \text{FSR}_i$ 时(FSR为自由谱密度), 式(6)可简化为

$$T(f) = \frac{Nu}{A_0 + A_1 f^2 + A_2 f^4} \quad (7)$$

在实际滤波器的设计中, 一般各腔的自由频谱基本相近或相等, 令其为FSR(free spectral range). 这样可以得到式(7)各个系数的表达式

$$\begin{cases} Nu = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2)(1 - r_3^2) \\ A_0 = r_2^2(1 + r_1 r_3)^2 + 2r_2(r_1(1 + r_3^2) + r_3(1 + r_1^2)) + (1 + r_1 r_3)^2 \\ A_1 = -\left(\frac{2\pi}{\text{FSR}}\right)^2 (r_1 r_2(1 + r_3^2) + r_2 r_3(1 + r_1^2) + 4r_1 r_3) \\ A_2 = \left(\frac{2\pi}{\text{FSR}}\right)^4 r_1 r_3 \end{cases} \quad (8)$$

若式(8)满足

$$\begin{cases} A_0 = Nu \\ A_1 = 0 \\ A_2 \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

则, 此滤波器具有巴特沃思滤波性能. 通过解式(9)条件下的联立方程可得

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_1 r_2 r_3 = 0 \\ r_1 r_2 (1 + r_3^2) + r_2 r_3 (1 + r_1^2) + 4r_1 r_3 = 0 \\ r_1 r_3 > 0 \end{cases} \quad (10)$$

显然, 式(10)与文献[3]的结论一致. 进一步化简式(10)可以得到各个反射系数之间的密切关系

$$\begin{cases} r_3 = r_1 \\ r_2 = \frac{-2r_1}{1 + r_1^2} \end{cases} \quad (11)$$

式(11)称之为具有巴特沃思滤波的二腔FP滤波器临界条件, 简称二腔临界条件. 即, 只要满足临界条件, 此二腔滤波器必是一个基本理想的巴特沃思型滤波器(因为推导过程是近似的). 由式(11)可知, 若实现FP滤波器巴特沃思滤波, 可直接根据实际要求, 依据式(11)选取适当的反射系数和自由频谱进行具有巴特沃思滤波性能的FP滤波器设计.

### 3) 三腔 FP 滤波器

三腔的功率传输系数<sup>[2,6]</sup>为

$$T = tt^* = t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^2 / D_4 \quad (12)$$

其中:  $D_4 = 1 + (r_1 r_2)^2 + (r_2 r_3)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_3 r_4)^2 + (r_1 r_2 r_3 r_4)^2 + (r_2 r_4)^2 + (r_1 r_4)^2 + 2 \cos(2\phi_1) r_1 r_2 (1 + r_3^2 + r_4^2) + 2 \cos(2\phi_2) r_2 r_3 (1 + r_1^2 + r_4^2) + 2 \cos(2\phi_3) r_3 r_4 (1 + r_1^2 + r_2^2 + r_4^2) + 2 \cos(2\phi_1 + 2\phi_2) r_1 r_3 (1 + r_4^2) + 4 \cos(2\phi_1 + 2\phi_3) r_1 r_2 r_3 r_4 + 2 \cos(2\phi_1 + 2\phi_2 + 2\phi_3) r_1 r_4 + 2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) r_1 r_2^2 r_3 (1 + r_4^2) + 4 \cos(2\phi_1 - 2\phi_3) r_1 r_2 r_3 r_4 + 2 \cos(2\phi_2 - 2\phi_3) r_2 r_3^2 r_4 (1 + r_1^2) + 2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2 + 2\phi_3) r_2 r_3^2 r_4 + 2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3) r_1 r_2^2 r_4 + 2 \cos(2\phi_1 + 2\phi_2 - 2\phi_3) r_1 r_3^2 r_4 \quad (13)$

同理,当  $f \ll FSR$  时,利用巴特沃思滤波器的性质,式(13)可简化为

$$T(f) = \frac{1}{1 + A_0 f^2 + A_1 f^4 + A_2 f^6} \quad (14)$$

及

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_1 r_2 r_4 \\ + r_1 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 = 0 \\ r_1 r_4 \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

对 3 组临界条件式(3)、(10)和(15)进行比较,可得到 3 者之间的关系:当  $r_2$  和  $r_3$  为 0 时,式(15)的第 1 式和式(10)的第 1 式完全相同;根据初等代数中的和差倍半公式可知,当腔的个数改变时,式(15)中第 2 式的符号需要翻转,其形式和式(10)的第 3 式吻合,则三腔的临界条件式变为二腔的临界条件. 同理,式(10)中  $r_2$  为 0 以及式(10)中第 3 式的符号再反转一次,则得到一腔的临界条件.

从式(12)、(13)中可以看出,三腔的计算更复杂一些. 虽然根据假设各腔具有相等或相近的自由频谱,令其为  $FSR$ ,然而求得解的形式太繁琐,令人难以接受. 故利用一腔和二腔的匹配形式来推测一下三腔临界条件的形式:  $r_1 = -r_4, r_2 = -r_3$ , 代入式(14),根据巴特沃思滤波要求:  $A_0 = A_1 = 0$ , 可得一组有效解

$$\begin{cases} r_1 = \frac{r_2^2 - 3 + \sqrt{r_2^4 - 10r_2^2 + 9}}{2r_2} \\ r_2 = r_2 \\ r_3 = -r_2 \\ r_4 = -r_1 \end{cases} \quad (16)$$

称之为具有巴特沃思滤波的三腔 FP 滤波器临界条

件,简称三腔临界条件. 尽管式(16)是经过推测得来的,不排除可能存在其他解的形式,但此等式毕竟是经过严格的数学推导,而且满足此条件的滤波器是物理可实现的,这充分说明了推测的正确性. 这样得到了真正揭示 FP 滤波器和巴特沃思滤波器之间内在联系的临界条件,使得 FP 滤波器具有了巴特沃思滤波特征——平顶陡边,同时也为 FP 滤波器的设计提供了一个很好的数学参考模型.

## 2 性能分析

实际中由于工艺等方面的原因使得 FP 滤波器稍偏离巴特沃思滤波,这会使  $A_1$  不再为零,由此会降低滤波器的性能. 一腔时,不同  $r_1$  时的传输函数的波形,如图 2 所示.

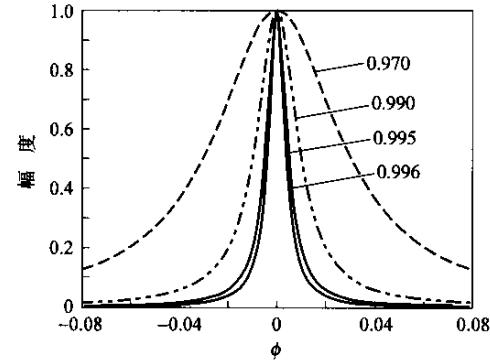


图 2 不同比例的反射系数下一腔传输系数的图形

显然,在临界条件下,反射系数是影响 FP 滤波器的性能的主要因素:当反射系数值增大时,滤波器的 3 dB 带宽将变窄. 若此时腔长不变即  $FSR$  不变,则参数精细度  $F$  增大,3 dB 带宽  $\Delta F$  变小. 因此可以用  $r_1$  的大小对滤波器的性能进行评估,以及进行实际滤波器的设计和优化. 本文的结论与文献[2]不同,原因是滤波方式不同:本文是满足  $\cos(2\phi) = 1$  低通滤波要求,而文献[2]满足在  $\cos(2\phi) = -1$  处滤波.

二腔时,如图 3 所示. 当滤波器的反射系数偏离临界条件时,滤波器的性能变差:当第 2 个镜的反射系数小于临界条件下的值时(绝对值的比较),曲线出现分裂,而且值越小,分裂越明显;当反射系数大于临界条件下的值时(绝对值的比较),曲线变得尖锐,滚降变差,而且值越大,此现象越明显. 因此,当设计滤波器时,不仅要考虑标准巴特沃思时的临界条件,而且也要考虑当偏离标准巴特沃思时,各个参

数带来的影响.

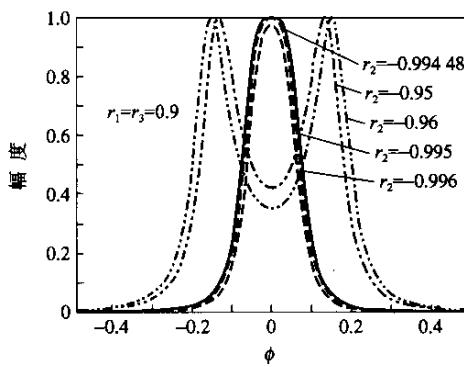


图 3 不同比例的反射系数下二腔传输系数的图形

利用图 4 来描述三腔反射系数满足临界条件和偏离临界条件时滤波器性能发生的变化. 此时的情况与二腔时相似, 当偏离临界条件时, 滤波器的性能变差; 当第一个镜的反射系数大于临界条件下的值时(绝对值的比较), 曲线出现分裂, 而且值越大, 分裂越明显; 当反射系数小于临界条件下的值时, 曲线变得尖锐, 滚降性能变差, 而且随着  $|r_1|$  值越小, 曲线越尖锐, 滚降越差.

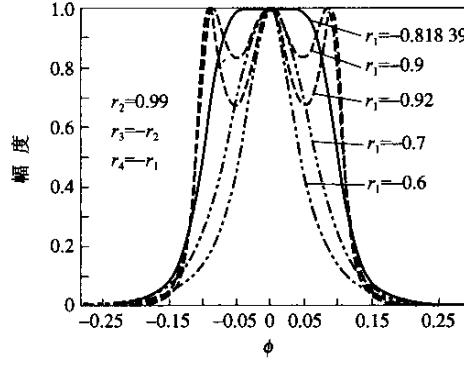


图 4 不同比例的反射系数下三腔传输系数的图形

虽然给出的结果表达式(3)、(11)、(16)是理想的巴特沃思型, 但由于在推导的过程中是近似计算, 因此在利用上式设计以后还需要进行滤波器的优化和微调. 利用图 5、6 和 7 描述本文结论的“巴特沃思”型滤波器和理想巴特沃思滤波器之间的联系和区别, 图中  $x = \phi$ , 纵坐标为本文结论的传输系数与相应理想巴特沃思滤波器的传输函数之差, 简称差值. 显然, 在临界条件下的 FP 滤波器并不是完全意义上的巴特沃思型, 而是一种逼近, 是存在一定误差的, 这种误差不但与反射率的选取有关, 而且也与其它参数有关. 因此在滤波器设计的过程中, 即使各参

数是在临界条件下选定的, 也应该考虑到近似计算所引起的误差, 验证此误差是否可以容忍.

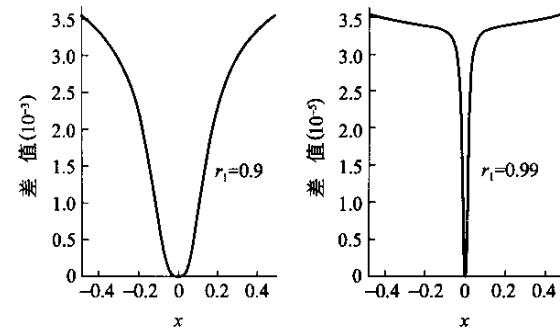


图 5 一腔时差值的图形

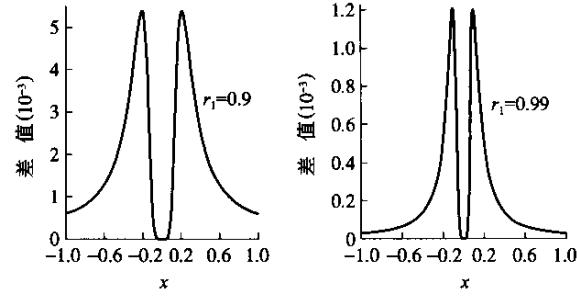


图 6 二腔时差值的图形

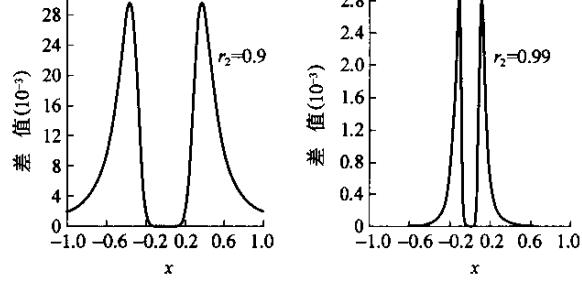


图 7 三腔时差值的图形

### 3 结束语

本文从 FP 的基本原理入手, 结合巴特沃思型滤波器的原理和 FP, 使 FP 腔滤波器具有巴特沃思滤波的临界条件, 从而把 FP 腔滤波器和巴特沃思型滤波器紧密的联系在一起. 另外, 本文另辟蹊径, 利用了推测的方法, 成功地求解了三腔结构的临界条件, 为以后不对称型或更多腔临界条件的理论推导和实际设计提供了一种行之有效的方案. 因为本文是按照低通滤波器的形式进行推导的, 与文献[2]不同, 二者的区别仅在于取样点的差异, 这种差异也使得 FP 滤波器的实际应用具有了多样性. 本文所

得出的结论可以直接用于 FP 滤波器以及干涉仪的设计。

#### 参考文献：

- [1] Cocorullo G. Simple and low-cost silicon fabry-perot filter for WDM channel monitoring[A]. Digest of the LEOs Summer Topical Meetings[C]. 2000. 45-46.
- [2] Herman van de stadt, Muller Johan M. Multimirror fabry-perot interferometers [J]. 1985, 8 (2): 1363-1370.
- [3] Saleh A A M, Stone J. Two-stage fabry-perot filters as demultiplexers in optical FDMA LANs [J].

(上接第 3 页)

## 5 中国的 NGI(CNGI, 含 IPv6) 将继续迅速发展

全球都在加快下一代 Internet(NGI)的建设,美国还提出了 NGI 的具体量化指标,即 100MX100M,意思是为 1 亿个家庭中的每个家庭提供 100 Mbit/s 带宽的宽带服务.在日本同样也推出每户 100 Mbit/s 的目标,这种上下对称的宽带服务将为多媒体业务提供极大的方便.中国的下一代 Internet(CNGI)也正在火热地进行中,前期已建设了一个世界上最大的基于 IPv6 的 Internet 实验网.中国电信等各大运营商、中国教育科研网等都将以 IPv6 技术和宽带、无线、移动、网格等多种新技术作为建设下一代互联网的依托.由于教育科研网将覆盖全国大、中、小学,用户是过亿的学生,因此其网络规模和用户数量号称全国第一.现在完成的 IPv6 部分事实上已成为世界上最大用户群的 Internet 实验网络.无论如何,IPv4 时代那种 IP 地址分配不公平的现象(例如中国全国 IP 地址不及美国 MIT 一个大学多),会通过我国在 IPv6 方面的努力而改变.这个具有  $10^{33}$  个 IP 地址的 IPv6,不仅可以解决人与人的互连互通,而且还能解决人与物(通过有线或无线)、甚至物与物间的通信.由于在 IPv6 时代,每个

- Lightwave Technology, 1989, 2(7):323-330.
- [4] Stone J, Stulz L W. Three-mirror fibre fabry-perot filters of optimal design [J]. Electronics Letters, 1990, 14(26):1073-1074.
- [5] Sake J. Fabry-Perot interferometers with three mirrors[J]. Applied Optics, 25(22); 4181-4184.
- [6] 齐永兴, 陈树强, 刘元安. Fabry-Perot 腔滤波器的数学模型[J]. 北京邮电大学学报, 2004, 27(1):18-21. Qi Yongxing, Chen Shuqiang, Liu Yuanan. The mathematical model of the fabary-perot filter [J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2004, 27(1):18-21.

人、每一物都可有一个唯一的 IP 地址,使得各种信息系统、管理系统、传输系统变得容易和准确、安全性好.相信 2005 年,我国在 CNGI 和 IPv6 方面必然大有作为并取得令世人瞩目的成果.

总之,研究、开发和应用热点绝不仅仅是上述几个.本文没有讨论 863、国家自然科学基金等国家立项所确定的本领域内那些研究热点,也没有一一列举各个应用范围的一些从长远看必然会发展为热点的题目.可以肯定,应用和服务是永久的话题(这一领域的游戏、信息互动、移动电视等会随着 3G 的到来而发展).另外,围绕 3G、B3G、4G 的各方面研究,特别是信息及网络安全研究、蜂窝系统与 WLAN(一直到宽带)融合的研究,以及家庭网络、RFID 也都会成为 2005 年的热点问题.本文并无意列出所有可能成为热点的研究课题,而只是提出几个可能会有所作为的研究、开发和应用的方面供大家参考.

#### 参考文献：

- [1] 钟嘉强. 2005 年无线市场 5 大趋势令人关注[J]. 通讯世界, 2005, 12-13.
- [2] 张永利. 全国信息产业工作会议提出 2005 年目标 [J]. 当代通信, 2005, 8.
- [3] 李兵. 移动 WAP 发展和展望[J]. 电信网技术, 2004, 28-30.

## 微波滤波器设计培训——视频课程

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养，是国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地。客户遍布中兴通讯、研通高频、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

我们推出的微波滤波器设计培训专题，有资深工程师领衔主讲，课程既有微波滤波器设计原理的详细解释，也有各种仿真分析工具的实际设计应用讲解，设计原理和设计仿真实践相结合，向大家呈现各种结构的微波滤波器的完整设计流程。旨在帮助大家透彻地理解并实际的掌握各种微波滤波器的设计。

### 微波滤波器设计培训专题视频课程



高清视频，专家授课，中文讲解，直观易学；既有微波滤波器设计原理的详细解释，也有像 ADS、CST、HFSS 各种仿真分析工具的实际设计应用讲解，旨在帮助大家透彻地理解并实际的掌握各种微波滤波器的设计。

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/filter/>

### 更多专业培训课程：

- **HFSS 视频培训课程**

网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/>

- **CST 视频培训课程**

网址: <http://www.edatop.com/peixun/cst/>

- **天线设计专业培训课程**

网址: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/>

专注于微波、射频、天线设计人才的培养

**易迪拓培训**

官方网址: <http://www.edatop.com>

淘宝网店: <http://shop36920890.taobao.com>