

# 基于 Weierstrass 函数的分形天线阵辐射特性分析\*

练学辉

(海军驻南京地区雷达系统军事代表室, 南京 210003)

**【摘要】** 分形天线是分形几何和天线技术交叉的产物, 分形概念用于天线阵的工程合成, 有助于将等幅度面阵和随机面阵的优点结合起来, 将分形的自相似特征用于随机面阵设计有助于控制旁瓣区域的天线方向图。基于维尔斯特拉斯(Weierstrass)广义函数, 研究天线阵排列系数函数的连续和不可微分的特性, 通过对天线阵的分形电动力学和天线阵可实现性条件的研究分析, 给出天线阵合成示例, 得到 Weierstrass 不同尺寸天线阵的辐射特性与分形因子的作用关系。指出雷达天线阵列在结构、频带、副瓣等方面需要进行改进。

**【关键词】** Weierstrass 函数; 分形; 天线阵; 辐射特性

中图分类号: TN82 文献标识码: A

## Analysis of Radiation Characteristics of Fractal Antenna Arrays Based on Weierstrass Function

LIAN Xue-hui

(Military Representatives Office of the PLA Navy in Nanjing, Nanjing 210003, China)

**【Abstract】** As a hybrid of fractal geometry and antenna technologies, the fractal array is capable of making use of the advantages of equiamplitude and random arrays. The application of the self-similar characteristics of fractal arrays in the design of random arrays facilitates the control of the antenna pattern within the side lobe region. Basing on the Weierstrass function, the continuity and undifferentiable characteristics of the array permutation coefficient is studied. An example of realizing the array is given through the analysis of the fractal electrodynamics and the implementation conditions. The relationship between the radiation characteristics and the fractal factor of different sized arrays which incorporate the Weierstrass function is obtained. Finally, the research trends of radar arrays in terms of structure, band width, and side lobe are pointed out.

**【Key words】** Weierstrass function; fractal; antenna array; radiation characteristics

## 0 引言

分形的概念是法国数学家芒德布罗在 20 世纪 70 年代中期提出来的。在这个名词被发明之前, 人们已经有了诸如“自相似”等重要概念, 分形则是自相似概念的创造性发展。

分形天线是分形几何和天线技术交叉的产物, 它具有小型化、多频带、可集成等优良特性, 是当前天线工程中一个新的研究热点。分形概念用于天线阵的工程合成, 有助于将等幅度面阵和随机面阵的优点结合起来。等幅度天线面阵的旁瓣不是很大, 但是对元件布局误差和激励电流值很灵敏。随机天线面阵对于元件布局误差及其故障不是很敏感, 但是其旁瓣电平相对较大。将自相似特征用于随机面阵设计有助于控制旁瓣区域的天线方向图。

分形几何应用于天线阵列的设计主要有 2 种方式, 分形单元可用于均匀分布阵列中, 也可以将阵列间距用分形形式来布局。目前 2 种典型的分形阵列天线是 Cabtor 集阵列和维尔斯特拉斯(Weierstrass)线性阵列。分形阵列与传统的阵列设计相比有如下特点: (1)多频、宽频特性; (2)可用迭代算法快速计算方向图; (3)可系统的稀疏阵列; (4)可有效地设计大的平面阵列; (5)可实现低副瓣设计策略。

本文研究分析基于 Weierstrass 函数分形天线阵(以下简称天线阵)的辐射特性。

## 1 天线阵的分形电动力学

电动力系统中的分形集是近年分形几何中最活跃和引人入胜的一个研究领域。电动力系统的奇异吸引子阵通常都是分形集, 它们产生于非线性函数的迭代

\* 收稿日期: 2008-05-17 修订日期: 2008-07-15

和非线性微分方程中,分形电动力学作为一门学科,分析合成分形天线方向图及其设计程序的理论原理,综合了分形理论和电磁学理论。与传统合成平滑天线方向图的方法不同,分形综合理论的最初基础是实现任意比例重复结构辐射特性的思想,这就使在分形电动力学中形成新的方式成为可能。有很多实用的研究方向,这些方向都可以合成分形的特性。这一点对研究自然分形介质(大气、地表覆盖物等)对电磁波的传播和散射、对雷达信号的处理、对在等离子体和电离层中借助大功率发射机制造人造不均匀体等都十分重要。

为了对合成过程进行数量描述,引入分形因子

$$D = \lg N / \lg r^{-1} \quad (1)$$

式中: $N$  为一个子阵中的元件数量; $r = r_1 / r_2$ ,  $r_1$  为子阵(振荡器)元件间的平均距离, $r_2$  为随机激励器元件间的平均距离。

作为天线阵排列系数的不可微分函数,著名 Weierstrass 广义函数在分形辐射特性的合成中有一定的作用。这些函数任何时候都是连续的,不可微分的,并在所有比例上都是非规则碎形,它们可以表示为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(D-2)n} g(\eta^n x) \quad (2)$$

式中: $1 < D < 2$ ;  $g$  为相适应的限制和周期函数; $\eta > 1$ 。

天线阵空间辐射器的分布设计产生了第 3 个变量,它与激励电流幅度和相位一起有助于成功地控制天线方向图。不均匀或不等距、但对称分布的  $2N$  辐射器天线阵的系数如图 1 所示。

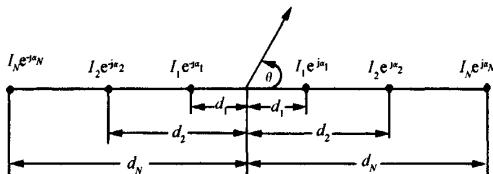


图 1 带有激励电流分布的有  $2N$  元件构成的对称天线阵

可以表示为

$$f(\theta) = 2 \sum_{n=1}^N I_n \cos(kd_n \cos\theta + a_n) \quad (3)$$

式中: $k = 2\pi/\lambda$ ;  $I_n$  和  $a_n$  为激励电流的幅度和相位; $d_n$  为相邻辐射器之间的距离。

假设有无穷多辐射器的天线阵系数通过带有余弦曲线函数  $g$  的 Weierstrass 广义函数式(2)来表示

$$f(u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(D-2)n} \cos(a\eta^n u + a_n) \quad (4)$$

式中: $a$  为某个常数。

比较式(3)和式(4)可以发现,当  $u = \cos\theta$  时,电流幅度和元件的分布满足以下条件

$$I_n = \eta^{(D-2)n}, \quad kd_n = a\eta^n \quad (5)$$

在无穷比例尺范围内分形方向图式(4)具有自相似属性。然而物理上完成的天线阵由有限数量的元件构成,即得到一个截短的级数

$$f_N(u) = 2 \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)n} \cos(a\eta^n u + a_n) \quad (6)$$

式(6)展示了幅度和相位都是按照式(5)分布的  $2N$  辐射器天线阵的系数,所以级数(6)就是范围上受限的 Weierstrass 函数,而合成的方向图在下限为  $2\pi/(a\eta^N)$  的有限数量的比例尺上是分形。因此用天线阵辐射器的数量  $N$  来检验有限数量的比例尺的范围。

观测角  $\theta$  的最大值为

$$f_N(u_0) = 2 \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)n} \quad (7)$$

并当  $u_0 = \cos\theta_0$  时,选择激励电流的相位  $a_n = -a\eta^n u$  来确定级数式(7)是几何级数,因此

$$f_N(u_0) = 2\eta^{(D-2)} \left[ \frac{1 - \eta^{(D-2)N}}{1 - \eta^{(D-2)}} \right] \quad (8)$$

而用式(6)除以式(8)就得到标准的 Weierstrass 天线阵系数

$$g_N(u) = \left[ \frac{1 - \eta^{(D-2)}}{1 - \eta^{(D-2)N}} \right] \sum_{n=1}^N i_n \cos(a\eta^n u + a_n) \quad (9)$$

式中标准的激励电流幅度

$$i_n = \eta^{(D-2)(n-1)} \quad (10)$$

比较式(5)和式(10)可知,天线阵上电流的分布决定了方向图的分形因子。

## 2 天线阵可实现性的条件

天线阵任意相邻辐射器之间的距离用式(11)评估

$$d_{n+1} - d_n = \left[ \frac{a(\eta - 1)\eta^n}{2\pi} \right] \lambda, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (11)$$

因为  $\eta > 1$ , 则当  $n > 1$  时,  $\eta^n > \eta$ , 所以有

$$d_{n+1} - d_n > d_2 - d_1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (12)$$

把  $\tau$  当作限制天线阵 2 个相邻辐射器间最小距离的因素,这样就可能有 2 种符合该条件的情况

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = \tau, & d_1 \geq \tau/2 \\ d_1 = \tau/2, & d_2 - d_1 \geq \tau \end{cases} \quad (13)$$

从不等式(12)可知,在满足式(13)时,天线阵其他所有的连续辐射器之间的空间距将一直符合最小距离 $\tau$ 的标准。如系数 $\tau$ 和 $\eta$ 一样,系数 $a$ 的关系式可以在联合解式(5)和式(13)时得到

$$\begin{cases} a = \frac{k\tau}{\eta(\eta-1)}, & 1 < \eta \leq 3 \\ a = \frac{k\tau}{2\eta}, & \eta \geq 3 \end{cases} \quad (14)$$

参数 $\eta$ 控制Weierstrass天线阵系数关系式的收敛。 $\eta$ 越接近于1,该天线阵需要的辐射器就越多。同时,当 $\eta$ 趋向于1时,天线阵2个相邻元件间的空间间距会随之减小。从另一方面来说,激励电流的幅度 $I_n$ 和相位 $a_n$ 以及辐射器的空间分布 $d_n$ 可以用迭代算法来确定

$$\begin{cases} I_n = \eta^{(D-2)} I_{n-1}, & I_1 = \eta^{(D-2)} \\ a_n = \eta a_{n-1}, & a_1 = -a\eta u_0 \\ d_n = \eta d_{n-1}, & d_1 = a\eta/k \end{cases} \quad (15)$$

式中: $n=2,3,\dots,N$ 。

### 3 天线阵的合成示例

假定分析的是 $\tau=\lambda/2$ 的Weierstrass天线阵,那么当 $a=1$ 时从式(14)可以得到 $\eta=2.34$ 。将 $\eta=2.34$ 代入到式(15)中,即可确定天线阵辐射器的空间间隔。图2是观测角 $\theta=60^\circ(\Gamma)$ 时辐射最大、各种分形因子激励电流分布时的16个辐射器天线阵的合成系数。在此情况下天线阵系数即等同于Weierstrass天线阵的方向图。因此,可得出以下结论:分形因子 $D$ 由天线阵中电流的分布控制,随着 $D$ 的提高,辐射特性不断复杂化。

表1 Weierstrass16元件天线阵辐射器坐标

辐射器序号 (n)	辐射器的位置 ( $d_n/\lambda$ )	辐射器序号 (n)	辐射器的位置 ( $d_n/\lambda$ )
1	0.372	5	11.166
2	0.872	6	26.129
3	2.039	7	61.141
4	4.772	8	143.069

图3a为额定的电流分布,它导致形成图2中受限的分形方向图。激励电流幅度的大幅下降对于合成较低分形因子的方向图来说是必要的。表1是Weierstrass天线阵辐射器的分布坐标,这个天线阵的几何形状依据参数 $\eta=2.34$ 、 $a=1$ 来描述。

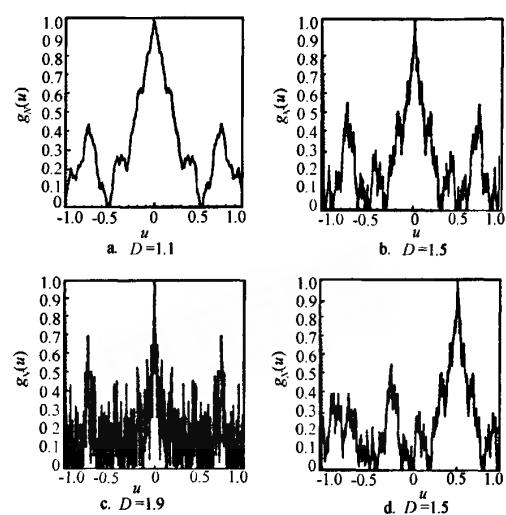


图2  $u_0=0, \tau=0.5\lambda, \eta=2.34, N=8$  时不同分形因子的Weierstrass16元件天线阵合成系数

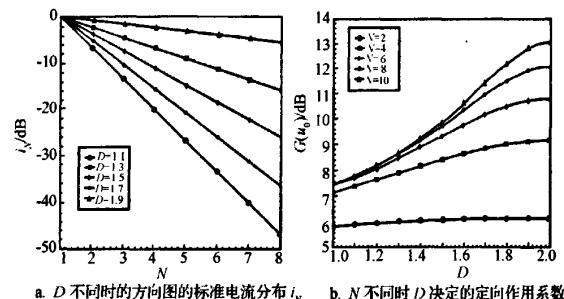


图3 不同尺寸天线阵的作用系数

### 4 天线阵的方向性

用式(6)和式(8)来确定Weierstrass天线阵的定向作用系数

$$G(u_0) = 2f_N^2(u_0) / \int_{-1}^1 f_N^2(u) du \quad (16)$$

其中

$$f_N^2(u) = 4 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)(m+n)} \cos(a\eta^m u + a_m) \cos(a\eta^n u + a_n) \quad (17)$$

求式(17)的积分,得到

$$\int_{-1}^1 f_N^2(u) du = 4 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)(m+n)} \Lambda_{mn}(a, \eta, u_0) \quad (18)$$

可以表述为

$$G(u_0) = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \eta^{(D-2)}}{1 - \eta^{(D-2)N}} \right]^2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)(n+m-2)} \Lambda_{mn}(a, \eta, u_0) \right\}^{-1} \quad (19)$$

其中

$$A_{mn}(a, \eta, u_0) = \int_{-1}^1 \cos[a\eta^m(u - u_0)] \cos[a\eta^n(u - u_0)] du = \cos[a(\eta^m + \eta^n)u_0] \sin[a(\eta^m + \eta^n)] + \cos[a(\eta^m - \eta^n)u_0] \sin[a(\eta^m - \eta^n)] \quad (20)$$

$D=2$  时, 该极限情况符合激励电流分布的天线阵为

$$G(u_0) = 2N^2 / \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \Lambda_{mn}(a, \eta, u_0) \quad (21)$$

用  $\eta^n$  代替  $\pi n/a$  和  $u_0=0$  时,  $G(0)=2N$ 。

一些不同尺寸天线阵的定向作用系数作为分形因子  $D$  列于图 3b 中。显然, 随着  $D$  的减小, 方向图的主要不断扩展, 而相应值  $G(u)$  则不断减小。

## 5 结束语

作为分形几何和天线技术的交叉产物, 分形天线的研究还十分有限, 如何将分形的概念和方法融入到

(上接第 69 页)

## 4 结束语

在分析有耗媒质半空间上线天线时, 将会涉及到索末菲积分的计算。由于严格的数值积分极其耗时, 本文利用一种基于二级离散复镜像理论的改进的广义函数束方法和远场首项近似公式对其进行分区计算, 从而避免了繁琐的数值积分运算, 大大提高了计算效率。最后给出了有耗媒质半空间上垂直线天线的远区辐射场。数值结果比较表明本文方法是精确、有效的。

## 参 考 文 献

- [1] Aksun M I. A robust approach for the derivation of close-form Green's functions [J]. IEEE Trans. MTT, 1996, 44(5):651-658.
- [2] Chew. W C. A quick way to approximate a Sommerfeld-Weyl-Type integral [J]. IEEE Trans. 1988, 36(11):1964-1957.
- [3] Sommerfeld A. Partial differential equations in physics [M]. NEW York: Academic Press, 1949.

现有的天线技术设计的实际应用中去, 使天线和阵列在结构、频带、副瓣等方面得到显著改进, 是很值得大家深入探讨研究的。对于基于 Weierstrass 函数分形天线阵辐射特性的分析研究, 目前无线通信领域已实现从实验室试验向工程实施跨越, 但在雷达天线工程方面的分析研究还有待不断地探索和试验。

## 参 考 文 献

- [1] 李明晶. 分形天线技术及其应用 [J]. 制导与引信, 2005(4):41-44.
- [2] 冯雪晴. 分形天线与阵列技术 [J]. 微波学报, 2006, 22(增刊):90-96.
- [3] 曾文曲, 刘世耀. 分形几何 [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 1991.
- [4] 董连科. 分形理论及其应用 [M]. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1998.
- [5] 尹荣雨, 薛宗慈, 陈尚平. 微积分学讲义 [M]. 北京: 师范大学出版社, 2006.

练学辉 男, 1965 年生, 硕士。研究方向为舰载雷达监造和检验。

- [4] Yavuz M E, Aksun M I, Dural G. Critical study of problems in discrete complex image method [C] // 2003 IEEE EMC Symposium, Conference Proceedings. Turkey: IEEE, 2003, 5:11-16.
- [5] Aksun M I, Yavuz M E, Dural G. Comments on the problems in DCIM [C] // 2003 IEEE APS International Symposium and USNC/CNC/URSI North American Radio Science Meeting, Conference Proceedings, Columbus, OH, USA: IEEE, 2003, 6:22-27.
- [6] Okhmatovski V I, Cangellaris A C. Computation of sommerfeld integrals via rational function fitting [J]. 2004 IEEE APS International Symposium, 2004, 4(6):3952-3955.
- [7] Rancic P D, Kitanovic M I. A new model for analysis of vertical asymmetrical linear antenna above a Lossy half-space [J]. AEÜ, 1997, 51(3):155-162.

魏福显 男, 1981 年生, 工程师。研究方向为电磁场数值计算与超宽带天线。

王春和 男, 1967 年生, 研究员。研究方向为超宽带雷达。

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立,一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养;后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com)),现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地,成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程,广受客户好评;并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书,帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司,以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年, 10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养, 更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果, 又能免除您舟车劳顿的辛苦, 学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲, 结合实际工程案例, 直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>