

# 线天线的小波矩阵变换法求解<sup>\*</sup>

## Analysis of Wire Antennas Using Wavelet Matrix Transform

孙保华 刘其中 尹应增  
(西安电子科技大学, 西安 710071)

SUN Baohua, LIU Qizhong, YIN Yingzeng  
(Xidian University, Xi'an 710071)

**【摘要】** 本文研究线天线的小波矩阵变换法求解。首先采用三角插值基函数和线天线的一种精确计算模型,利用矩量法得到矩阵方程,然后通过 Daubechies 离散小波变换进行快速求解。计算结果表明,该方法能够使阻抗矩阵稀疏化,从而提高了求解速度。

**关键词:** 小波,矩量法,稀疏矩阵,线天线

**Abstract:** A study is made of the solution of wire antennas using wavelet transform. The impedance matrix equations obtained by MOM are efficiently solved using Daubechies discrete wavelet transform, several numerical samples indicate that wavelet transform can lead to sparse impedance matrix, hence the computing time is greatly reduced.

**Key terms:** Wavelet, MOM, Sparse matrix, Wire antenna

### 一、引 言

近年来,将小波分析与矩量法相结合来求解电磁场积分方程的方法得到了较为广泛的重视和应用。这些方法基本上可概括为两种;即小波展开(Wavelet Expansion)<sup>[1]</sup>和小波变换(Wavelet Transform)<sup>[2~3]</sup>。小波展开法通常是依据多分辨率分解,将函数展开成小波级数,再利用矩量法确定展开系数;而小波变换则是先利用一般、简单的基函数(如脉冲基函数等)将函数展开,并由矩量法得到常用的矩阵方程,然后再利用 Mallat 分解算法,对矩阵方程进行小波变换求解矩阵方程,并通过逆变换求得对应于原始基函数的展开系数。

无论是小波展开,还是小波变换,在求解电磁场积分方程时都有一个共同的优点,就是在小波基对应的矩阵方程中,系数矩阵(或称为阻抗矩阵)为一稀疏矩阵。一般认为,求解上述稀疏矩阵方程只需要  $O(N\log N)$  次运算。与此相比,对一个稠密矩阵方程,若采用求逆法则需要  $O(N^3)$  次运算。而采用迭代(如共轭梯度法等),则每次稠密矩阵与向量相乘需要  $O(N^2)$  次运算。因此,这两种方法都能够提高计算速度。

<sup>\*</sup> 收稿日期:2000-01-17;定稿日期:2000-04-10。国防预研基金资助项目(No. 31.5.4.2)。

对小波展开和小波变换两种方法进行比较,前者直接求解积分方程,似乎更为便捷。然而在电磁场积分方程中,积分是在导体表面进行的,这种积分是一种广义主值积分,基函数的复杂性势必会给积分计算造成困难,从而也给小波基的选取带来一定的限制。而后者则避免了小波基函数直接积分,从而克服了这一缺陷。

本文以不同粗细(半径  $a=1\times 10^{-7}\lambda$  和  $a=0.0509\lambda$ )半波振子天线为例,采用 Daubechies 离散小波变换,使其成为稀疏阵方程,最后利用双共轭梯度法求解该方程,并将得到的解向量进行逆变换,从而得到三角插值基函数的展开系数。在此基础上,进一步分析、计算天线电流分布、输入阻抗等电特性。

## 二、线天线矩量法分析

### 2.1 线天线电场积分方程

用矩量法计算线天线,通常要使用电场积分方程(EFIE)

$$-\vec{s} \cdot \vec{E}^i(\vec{r}) = \frac{-j\eta}{4\pi k} \iint_s \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{s} dA' \quad (1)$$

式中  $\vec{G}$  为自由空间的并矢格林函数

$$\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') = (k^2 \vec{I} + \nabla \nabla) g(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2)$$

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3)$$

$k$  和  $\eta$  分别为自由空间的波数和波阻抗,  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ 。

### 2.2 矩量法求解电场积分方程

R. F. Harrington 在文献[4]中对矩量法进行了近乎完美的描述。本文在计算线天线时采用三角插值基函数,其表达式为:

$$f_i = A_i + B_i \sin k(s - s_i) + C_i \cos k(s - s_i) \quad (4)$$

该函数及其一阶导数是连续的,因而能较好地表示线天线上的电流分布。式中的三个未知量,两个可以通过电流、电荷连续方程确定,另外一个可通过矩量法点选配确定

$$ZI = V \quad (5)$$

为了保证计算精度,用矩量法来计算线天线时,通常要求分段长度  $\Delta$  和振子半径  $a$  满足  $\Delta/a \geq 10$ , 因此对振子的分段和半径提出了限制。文献[5]和[6]给出了计算粗、细线天线时用一种级数表示的精确模型,将其应用于线天线的矩量法计算中,则克服了以上限制(本文使用的计算软件,振子半径  $a$  可以在  $1 \times 10^{-30} \sim 0.2\lambda$  之间取值,同时对分段  $\Delta$  没有特别限制)。

## 三、Daubechies 离散小波变换及其在矩量法中的应用

### 3.1 Daubechies 小波滤波器

依照多分辨率分析的思想,设  $f(x)$  是  $L^2(R)$  空间中的任意函数,另设  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  分别为尺度函数和小波基函数<sup>[7]</sup>,则有:

$$f(x) = \sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x) + \sum_k c_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(x) \quad (6)$$

其中

$$c_{j-1,k} = \langle f(x), \varphi_{j-1,k}(x) \rangle = \sum_l c_{j,l} \langle \varphi_{j,l}(x), \varphi_{j-1,k}(x) \rangle = \sum_l h_{l-2k} c_{j,l} \quad (7)$$

$$d_{j-1,k} = \langle f(x), \psi_{j-1,k}(x) \rangle = \sum_l c_{j,l} \langle \varphi_{j,l}(x), \psi_{j-1,k}(x) \rangle = \sum_l g_{l-2k} c_{j,l} \quad (8)$$

写成矩阵形式

$$\begin{cases} C_{j-1} = H C_j \\ D_{j-1} = G C_j \end{cases} \quad (9)$$

上式即为著名的 Mallat 公式。通常称  $H$ 、 $G$  为小波滤波器,  $H$  为低通滤波器,  $G$  为带通滤波器。

人们对 Daubechies 小波滤波器较为熟悉。它由有限几个滤波器系数组成<sup>[8]</sup>, 以 Daubechies-4 为例, 它只有  $c_0, c_1, c_2, c_3$  4 个系数

$$W = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & & \\ & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & \\ & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & & & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ & c_2 & c_3 & & & & & & c_0 & c_1 & \\ c_1 & -c_0 & & & & & & & c_3 & -c_2 & \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中空白之处表示零元素,  $c_0, c_1, c_2$  和  $c_3$  组成低通滤波器  $H$ ,  $c_3, -c_2, c_1$  和  $-c_0$  组成带通滤波器  $G$ 。

$W$  为正交矩阵,  $W^{-1} = W^T$ , 另外结合消失矩条件,  $p=2$ , 得到方程组

$$\begin{cases} c_3^2 + c_2^2 + c_1^2 + c_0^2 = 1 \\ c_2 c_0 + c_3 c_1 = 0 \\ c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0 \\ 0 c_3 - 1 c_2 + 2 c_1 - 3 c_0 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

求解以上方程组, 便得到了 Daubechies 小波滤波器系数  $c_0, c_1, c_2$  和  $c_3$ 。不同消失矩滤波器均可以采用上述方法求出<sup>[8]</sup>。相比较而言, 消失矩  $p$  阶数越高, 小波基函数越光滑, 但局部化特性越差。

### 3.2 Daubechies 离散小波变换

离散小波变换 (Discrete Wavelet Transform, DWT) 通常采用塔式算法 (Pyramidal Algorithm) 来实现<sup>[7,8]</sup>。

### 3.3 Daubechies 离散小波变换在矩量法中的应用

下面我们将离散小波变换应用于线天线矩量法的计算中。由于  $W^{-1} = W^T$ , 对 (5) 式两边同时进行变换, 则有

$$W Z W^{-1} \cdot W I = W Z W^T \cdot W I = W V \quad (12)$$

式中对阻抗矩阵  $Z$  及向量  $V$  和  $I$  进行离散小波变换, 并采用 3.2 节中的塔式算法来实现。令  $Z' = W Z W^T, I' = W I, V' = W V$ , 则上式化为:

$$Z' I' = V' \quad (13)$$

通过上述变换,便得到了小波基意义下的阻抗矩阵  $Z'$ 。通过计算发现,利用 Daubechies 离散小波变换,不同粗细半波振子天线  $Z'$  为稀疏矩阵,即和其他元素相比,矩阵中一些元素的值很小,以至于在给定阈值  $\tau$  之后可以将其视为零元素。由后边的计算实例可以看出,解此稀疏矩阵方程与直接求解(5)式,能够明显地提高计算速度。文中使用的阈值  $\tau = 1.0 \times 10^{-4} \times \max\{|z'_{m,n}|\}$ ,其中  $z'_{m,n}$  为  $Z'$  中的元素,  $\max\{\}$  表示求最大值。

电磁学中的物理量(如电场  $\vec{E}(\vec{r})$ 、电流  $I$  等等)通常随参数的变化较为平滑,因此,选择光滑的小波基函数能够更好地表示其特性。对 Daubechies 基函数而言,消失矩  $p$  阶数越高,基函数越光滑,矩阵压缩效率也越高。然而,阶数越高, Daubechies 小波滤波器中非零元素的个数也越多,从而加大了离散变换的计算量。因此,消失矩  $p$  存在着最佳选择问题。通过计算比较,本文选用  $p=6$ 。

求解稀疏线性方程组有多种方法,文中使用双共轭梯度法<sup>[8]</sup>,取得了较为理想的效果。

## 四、计算实例

### 4.1 细振子天线

以半波振子天线为例,半径  $a = 1.0 \times 10^{-7} \lambda$ , 电压源馈电。利用上述方法进行计算,分段数  $N=255$ ,由于利用塔式算法进行小波变换,要求矩阵维数为  $2^N$ ,为此将矩阵扩展为  $N=256$ 。选取阈值  $\tau = 2.5 \times 10^{-6}$ ,阻抗矩阵  $Z'$  如图 1 所示,图中空白之处表示零元素。显然,  $Z'$  是一个稀疏矩阵,设  $\eta$  等于矩阵非零元素与元素总数之比,本例中  $\eta = 36.7\%$ 。

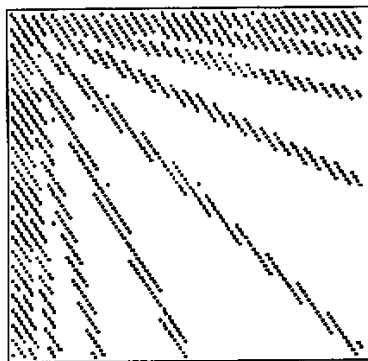


图 1 例 1 稀疏矩阵示意图

将小波变换法求得的电流系数与矩量法计算结果进行比较(图 2),可以看出其误差非常小。图 3 所示为用小波变换法求得的电流幅度曲线。

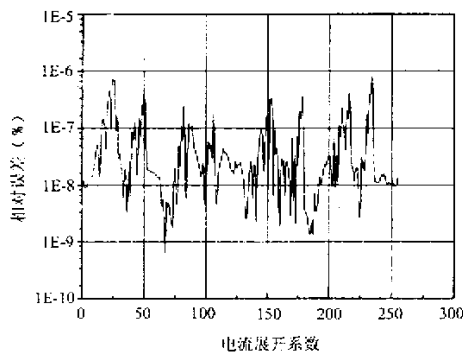


图 2 电流系数误差曲线

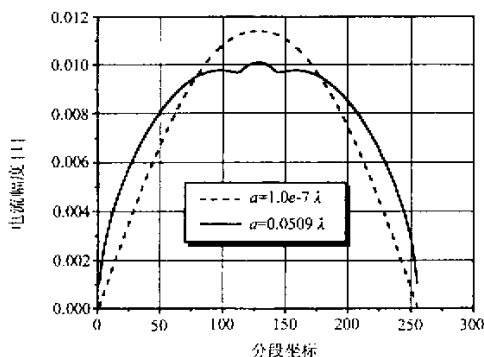


图 3 电流分布曲线

与采用 Gauss—Jordan 全主元消元法直接求解矩量法矩阵方程相比,用双共轭梯度法求解稀疏矩阵方程,可以明显地节省计算时间。具体数据见表 1。表中还给出了用小波变换法得到的天线输入阻抗等特性参数<sup>[5,6]</sup>。另外,将  $N=256$  改为  $N=512$ ,比较计算结果不难发现, $N$  取值越大,矩阵越稀疏。因而,在同等维数下与直接计算阻抗矩阵方程相比,节省计算时间愈为明显。

4.2 粗振子天线

文献[5]中计算了半径  $a=0.0509\lambda$  的半波振子天线。以此为例,采用小波变换法进行计算,得到  $Z'$ ,如图 4 所示,其他数据见表 1。从中不难看出,对于粗振子天线,和细振子天线一样,小波变换法同样可以达到阻抗矩阵稀疏化以及提高计算速度的目的。

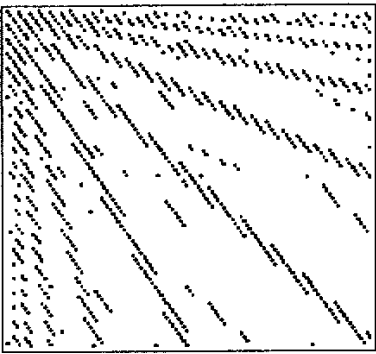


图 4 例 2 稀疏矩阵示意图

表 1 计算结果

分段数	细半波振子天线 $a=1\times10^{-7}\lambda$		粗半波振子天线 $a=0.0509\lambda$
	$N=256$	$N=512$	$N=256$
变换矩阵 $Z$	1.804s	1.800s	7.311s
变换向量 $V$	0.006s	0.005s	0.011s
求解 $\hat{Z}\hat{I}=\hat{V}$	1.476s	1.389s	8.336s
逆变换解 $\hat{V}$	0.005s	0.005s	0.012s
共计	3.329s	3.199s	15.670s
G—J 全主元消元法	23.45s	23.02s	199.317s
$\eta$	36.7%	30.3%	21.6%
电流系数相对误差	$<10^{-6}\%$	$<10^{-5}\%$	$<10^{-5}\%$
天线输入阻抗 $Z_{in}$	$76.369+j42.001\Omega$	$76.290+j41.987\Omega$	$96.12-j22.31\Omega$

五、结 论

在线天线矩量法计算中,引入离散小波变换,可以实现阻抗矩阵稀疏化。和直接求解矩量法得到的稠密矩阵方程相比,解稀疏矩阵方程能够明显地节省时间,因而实现了线天线的快速分析与计算。

参 考 文 献

[1] J. C. Goswami, K. Chan, C. K. Chui. On solving **万方数据** and integral equations using wavelets on a bounded interval. IEEE Trans.

AP., 1995, 43(6):614~622.  
[2] Z. Xiang, Y. lu. An effective wavelet matrix transform approach for efficient solutions of electromagnetic integral equations. IEEE Trans. AP., 1997, 45(8):1025~1213.

- [3] W. L. Golik. Wavelet packets for fast solution of electromagnetic integral equations. IEEE Trans. AP., 1998, 46(5): 618~624.
- [4] R. F. Harrington. Field Computation by Moment Method. New York: Macmillan, 1979. 18~75.
- [5] D. H. Werner. A method of moment approach for the efficient and accurate modeling of moderately thick cylindrical wire Antennas. IEEE Trans. AP., 1998, 46(3): 373~382.
- [6] D. H. Werner. Advanced electromagnetics: Foundation, Theory and Application. Singapore: World Scientific, 1995. 682~762
- [7] 宋国香. 数值泛函与小波分析. 河南: 河南科技出版社, 1993. 159~186.
- [8] W. H. 孙保华, A. Teukolsky, etc. Numerical

recipes in fortran. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 584~599

**孙保华** 1970 年生, 1996 年毕业于西安电子科技大学电磁场与微波技术专业, 获硕士学位。现在西安电子科技大学电子工程学院攻读博士学位。

**刘其中** 1938 年生, 1961 年毕业于成都电讯工程学院雷达系。现为西安电子科技大学天线所教授、博士生导师。在国内外刊物上发表论文 50 多篇, 研究方向为天线数值计算与 CAD、宽带小型化天线和智能天线、电磁散射。

**尹应增** 副教授, 分别于 1987 年和 1990 年获西安电子科技大学电磁场与微波技术专业学士和硕士学位, 现在西安电子科技大学电子工程学院攻读博士学位。已在国内外刊物上发表论文 20 余篇, 主要研究方向包括: 天线 CAD、微带天线及电磁散射等。

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深, 让许多工程师望而却步, 然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上, 我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识, 借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养, 推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程, 化繁为简, 直观易学, 可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛, 让天线设计不再难...



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书, 课程从基础讲起, 内容由浅入深, 理论介绍和实际操作讲解相结合, 全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程, 可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计, 让天线设计不再难...

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程, 由经验丰富的专家授课, 旨在帮助您从零开始, 全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程, 边操作边讲解, 直观易学; 购买套装同时赠送 3 个月在线答疑, 帮您解答学习中遇到的问题, 让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程, 培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合, 全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作, 同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习, 可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试...

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训：

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力和专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com))，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势：

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

## 联系我们：

- ※ 易迪拓培训官网：<http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网：<http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店：<http://shop36920890.taobao.com>