

文章编号:1671-0576(2010)01-0055-06

# 角锥天线设计的非线性方程求解

江轶慧, 张漠杰

(上海无线电设备研究所, 上海 200090)

**摘要:** 角锥喇叭天线设计被等同于求解一组非线性方程, 方程组的约束条件是两个主波束宽度和增益指标, 解向量是决定喇叭形状的一组独立尺寸。求解采用全局收敛准则的 Newton-Raphson 迭代法。将指标扩展到一个连续变域后, 解向量的矢端将描绘出三维空间曲面, 曲面的边界恰对应指标的容许界限。作出该收敛域的几组二维投影图, 看出角锥天线特性和算法收敛特征之间的诸多关联。解向量的存在和唯一性得到回答。几种特殊情况下指标界限被列于文中。设计并加工测量一个 S 波段角锥天线, 证实方法在应用层面的效果。

**关键词:** 角锥喇叭; 迭代; 收敛; 天线

**中图分类号:** TN823.16

**文献标识码:** A

## Pyramidal Horn Design by Nonlinear Equations Solving

JIANG Yi-hui, ZHANG Mo-jie

(Shanghai Radio Equipment Research Institute, Shanghai 200090, China)

**Abstract:** Iteration for nonlinear sets of equations is applied to pyramidal horn design. The restrictions are established by forcing the beamwidths and the gain expressions to satisfy simultaneously the corresponding indices while the solution vector, each dimension of which represents an independent geometrical parameter of the horn, is found by Newton-Raphson iteration with an entire-domain convergence strategy. By extending the indices to a continuum, the solution vector is found to form continuous sheets in 3D space, the boundary of which corresponds to the limits of the indices range. 2D projections of this convergence domain is curved with the design parameters as three dimensions varying with the horn indices. The curves give an insight into the correlation between the horn characteristics and the convergence behavior of the algorithm. Conclusion is derived about the existence and uniqueness of the solution. The limits of indices for three special cases are listed. An S band pyramidal horn is designed and fabricated to show the validity of the method to antenna engineering.

**Key words:** pyramidal horn; iteration; convergence; antenna

---

收稿日期:2009-11-10

作者简介:江轶慧(1978—),女,硕士,主要从事计算电磁学和天线技术的研究;张漠杰(1943—),男,研究员,主要从事天线罩和天线技术的研究。

万方数据

## 0 引言

角锥喇叭天线的设计方式通常是根据增益的指标,用经验公式估算出一个面的大致尺寸,查阅图线图表得到完整的尺寸值,再视计算出的性能接受与否继续修正。虽然这样不难得到一个可供多数情况下使用的角锥喇叭天线,但是未能做到性能对两个正面的波束宽度  $\theta_{0.5H}$ 、 $\theta_{0.5E}$  和增益  $G$  这三个指标严格意义上的同时满足。经验公式和图线的适用范围有限,得到的喇叭天线并非最佳,造成偏差加大。合理指标的界限也从未被设计人员考察过。

本文从分析角锥喇叭天线的严格公式出发,直接求解逆问题,寻找多维方程的解向量。以该解为尺寸的角锥天线,其性能的理论值能够满足任意合理的给定指标,实现了波束宽度和增益的任意控制。对于方程组无解的情形也能够明确指出假想的解不存在,即要求的指标不可实现。设计过程因此严格化。

在此基础上,描画收敛域的完整图界并讨论解向量的存在性和唯一性。从中看出口面分布,口面利用率,指标界限和算法收敛域之间的关联。

设计并加工、测量了一个 S 波段角锥天线,证实方法在应用层面的效果。

## 1 基于逆问题求解的综合方法

### 1.1 分析公式

根据角锥喇叭的内外场两步分析法以及口面场等效假定<sup>[1]</sup>,主模工作频率下喇叭开口面上的场为

$$E = jE_0 \cos \frac{\pi x}{D_H} e^{-j\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{x^2}{R_H} + \frac{y^2}{R_E} \right)} \quad (1)$$

等效源辐射的(未归一化)远场幅度和增益表达式为

$$E_H^{\text{far}} = (1 + \cos\theta) \{ e^{j\frac{\pi}{\lambda} \lambda R_H \left( \frac{1}{D_H} + \frac{2\sin\theta}{\lambda} \right)^2} [c(u_1) - j s(u_1) + c(u_2) - j s(u_2)] \} + (1 + \cos\theta) \{ e^{j\frac{\pi}{\lambda} \lambda R_H \left( \frac{1}{D_H} - \frac{2\sin\theta}{\lambda} \right)^2} [c(u_3) - j s(u_3) + c(u_4) - j s(u_4)] \} \quad (2)$$

$$E_E^{\text{far}} = (1 + \cos\theta) e^{j\frac{\pi}{\lambda} \sin^2 R_E} [c(w_1) -$$

$$j s(w_1) + c(w_2) - j s(w_2)]$$

主波束宽度为

$$\begin{aligned} \theta_{0.5H} &= (\theta_H^+ - \theta_H^-) \Big|_{E_H^{\text{far}} = \frac{E_{\text{max}}}{\sqrt{2}}} \\ \theta_{0.5E} &= (\theta_E^+ - \theta_E^-) \Big|_{E_E^{\text{far}} = \frac{E_{\text{max}}}{\sqrt{2}}} \end{aligned} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{D_H}{\sqrt{\lambda R_H}} - \sqrt{\lambda R_H} \left( \frac{1}{D_H} + \frac{2\sin\theta}{\lambda} \right) \right] \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{D_H}{\sqrt{\lambda R_H}} + \sqrt{\lambda R_H} \left( \frac{1}{D_H} + \frac{2\sin\theta}{\lambda} \right) \right] \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{D_H}{\sqrt{\lambda R_H}} + \sqrt{\lambda R_H} \left( \frac{1}{D_H} - \frac{2\sin\theta}{\lambda} \right) \right] \\ u_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{D_H}{\sqrt{\lambda R_H}} - \sqrt{\lambda R_H} \left( \frac{1}{D_H} - \frac{2\sin\theta}{\lambda} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{D_E}{\sqrt{2\lambda R_E}} + \sqrt{\frac{2R_E}{\lambda}} \sin\theta \\ w_2 &= \frac{D_E}{\sqrt{2\lambda R_E}} - \sqrt{\frac{2R_E}{\lambda}} \sin\theta \end{aligned} \quad (5)$$

$$G = \frac{8\pi R_H R_E}{D_H D_E} \{ [C(u) + C(v)]^2 + [S(u) + S(v)]^2 \} [C^2(\omega) + S^2(\omega)]^2 \quad (6)$$

式(6)中:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{D_H}{\sqrt{\lambda R_H}} + \frac{\sqrt{\lambda R_H}}{D_H} \right) \\ v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{D_H}{\sqrt{\lambda R_H}} - \frac{\sqrt{\lambda R_H}}{D_H} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\omega = \frac{D_E}{\sqrt{2\lambda R_E}}$$

$$\begin{cases} C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt \\ S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $D_H$  为口面宽边的长度;  $D_E$  为口面窄边的长度;  $H$  为喇叭高;  $R_H$  为  $H$  面斜径;  $R_E$  为  $E$  面斜径;  $\lambda$  为工作波长; 式(8)为菲涅尔积分。

### 1.2 约束方程组

选取口面长宽  $D_H$ 、 $D_E$  和高度  $H$  为决定式(2)和式(6)的独立变量。将波束宽度(3)看作式(2)的必然结果,列出波束宽度和增益关于尺寸的形式表达式,迫使它们等于要达到的指标,就可建立起一组约束:

$$\left. \begin{array}{l} G(D_H, D_E, H) = G_0 \\ \theta_{0.5H}(D_H, D_E, H) = \theta_{0.5H0} \\ \theta_{0.5E}(D_H, D_E, H) = \theta_{0.5E0} \end{array} \right\} \quad (9)$$

式中,左边项  $G, \theta_{0.5H}$  和  $\theta_{0.5E}$  仅代表增益和波束宽度关于尺寸  $D_H, D_E, H$  的可解析或不可解析的形式,右边项  $G_0, \theta_{0.5H0}$  和  $\theta_{0.5E0}$  是要求达到的指标数值。从中解出独立尺寸  $D_H, D_E, H$ ,就得到了设计值。

## 2 求解方法

方程(9)属于  $N$  个未知量的  $N$  个方程。常用多维方程求根的 Newton-Raphson 迭代法或由之发展而来的拟 Newton 迭代法可以给出其一个精确解<sup>[2]</sup>。但是,前提是迭代的初始预测向量必须足够靠近真实解向量,否则  $x$  可能会偏离至无规则的远处而使求解失败。这种对初始值的明显依赖会造成如下弊端:

- 需要事先获知解的大致位置;
- 当结果不收敛时,无法判断是因为初始值取得不够理想还是该问题本身就无解。

为克服这两点,本文用 Newton-Raphson 法结合一种全局收敛的改进来求解<sup>[2]</sup>,只需粗略的取定  $D_H, D_E, H$  三个尺寸的起始值就能迭代出满足方程的一组解。

### 2.1 迭代方法

向量方程:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{0} \quad (10)$$

其中:

$$x = (\dots, x_i, \dots) \quad F = (\dots, F_i, \dots) \quad i = 1, \dots, N$$

Taylor 展开为

$$F(x + \delta x) = F(x) + \bar{J} \cdot \delta x + O(\delta x^2) \quad (11)$$

式中:偏导数构成的 Jacobi 矩阵为

$$J_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (12)$$

忽略  $\delta x^2$  及其更高阶项,并置  $F(x + \delta x) = 0$ ,可以得到一个关于修正项  $\delta x$  的线性方程组:

$$\bar{J} \cdot \delta x = -F \quad (13)$$

对式(12)的矩阵方程求出的修正项添加到解向量中:

万方数据

$$x_{\text{new}} = x_{\text{old}} + \delta x \quad (14)$$

这一过程不断迭代直到收敛为止。

### 2.2 全局收敛改进

引入辅助函数:

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} \quad (15)$$

沿每一次步长  $\delta x$  方向求  $f$  的极小值:

$$f(x + \lambda \delta x) = f_{\min} \quad (16)$$

得到相应  $\lambda$ ,以  $\lambda \delta x$  代入式(16)中  $\delta x$ 。

### 2.3 求解结果

$(G, \theta_{0.5H}, \theta_{0.5E})$  对  $(D_H, D_E, H)$  是渐变的,使方程有解的指标全体也描绘出一个连续的三维区域,其边界使得  $(G, \theta_{0.5H}, \theta_{0.5E})$  对  $D_H, D_E, H$  至少之一趋向一个极限。由此,固定指标中的两个值,允许另一个值变动,计算这一界限的三个两维投影,如图 1~6 所示。

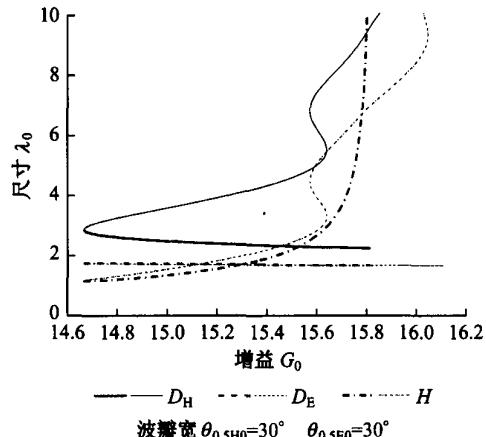


图 1 尺寸随增益变化(局部放大)

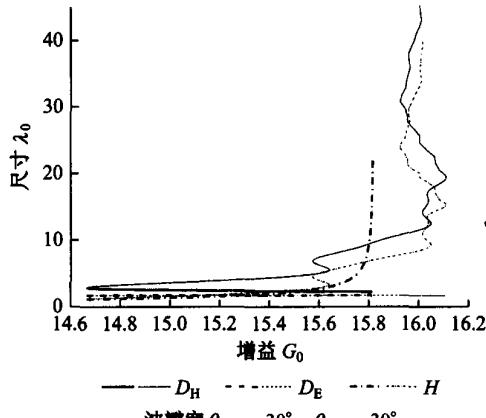


图 2 尺寸随增益变化

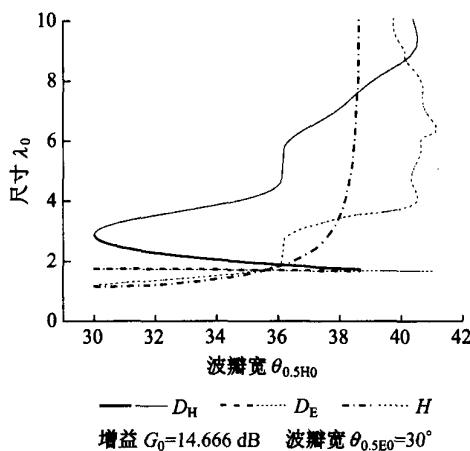


图 3 尺寸随 H 面波束宽度变化(局部放大)

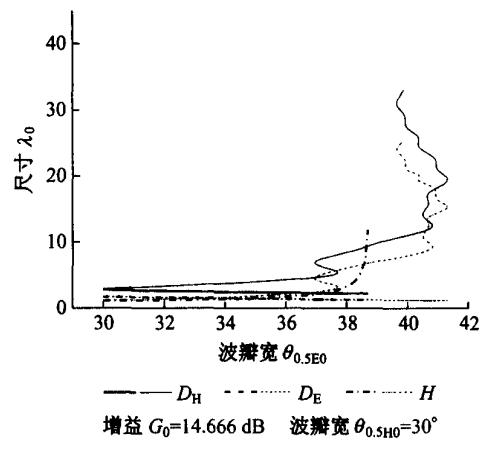


图 6 尺寸随 E 面波束宽度变化

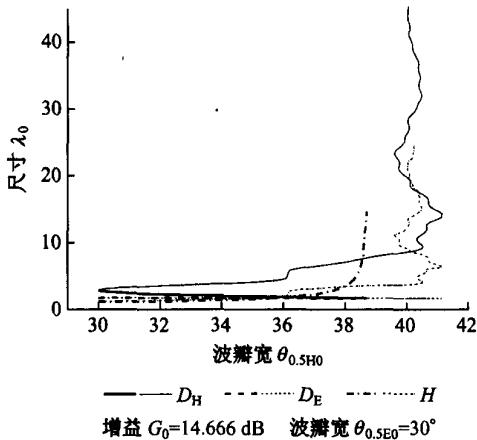


图 4 尺寸随 H 面波束宽度变化

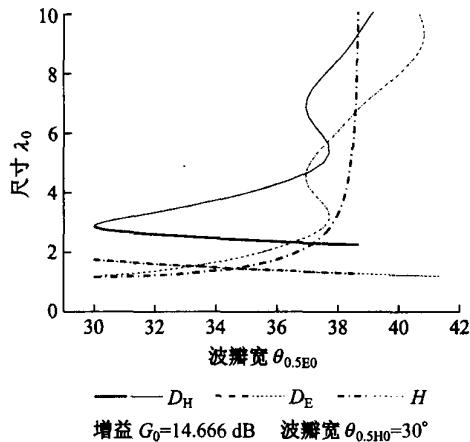


图 5 尺寸随 E 面波束宽度变化(局部放大)

图中横轴表示另两个指标固定前提下变动的一个指标,纵轴表示满足指标的一组尺寸。粗线表示主值,即实用段的尺寸;细线表示存在的另外

多组解,是口面分布畸变后的结果。图 1,3,5 显示小尺寸结果;图 2,4,6 给出完整结果。

### 3 结果分析

#### 3.1 全局收敛

计算结果体现出该算法的全局收敛特性。只要在工作波长的尺度内选择,三个尺寸的迭代起始点总能收敛到一组结果,表现出足够宽范围内的全局收敛特性。虽然不会是绝对意义上的全局收敛,因为起始值的任意选择也不能超出使分析公式有意义的限度,否则会引起波导截止或函数形态严重畸变导致计算缓慢。

#### 3.2 收敛域的有界性和多值性

既然算法是全局收敛的,只要有解就必能找到,不收敛的情形只能代表问题本身就无解,而无解的原因只能是指标规定的不合理。由图可见:

a) 使得方程组(9)有解的指标存在一个上限和下限,超过这个界限迭代不会有结果;

b) 满足同一组指标的尺寸取值并不是唯一的,即方程组是多解的。

考察粗线表示的主值支,它代表的解其实是口面上只有同相场情形下的尺寸。此时,当增益或波束宽度之一过大到无法与其余指标相适应时,算法试图通过无限延伸喇叭长度  $H$ ,趋近这样不合理的指标,因为  $H$  越大,口面相差越趋于分布均匀,因此利用效率越高。但是,对于一定波束宽度的天线来说,增益的提高不可能是无限制

的(或者对于一定增益的天线来说,波束宽度的增加也不可能无限制的),因此天线就达到了某一指标的上限,也就是此时结果不再能收敛的物理意义所在。

另一方面,当增益或波束宽度之一减小,而其余指标不变时,算法主要通过增加口面宽边  $D_H$  同时适当调整  $D_E$  和  $H$  来实现,因为这样会使得口面相差分布趋于不均匀,利用率降低。值得注意的是,随着  $D_H$  的增加,增益会到达一个极小值点,然后再次增大重复先前的数值,致使解向量第二分支的出现。这是由于此时边缘相差已超过  $\pi$ ,使得口面上出现反相场部分抵消了中心同相场的最外缘,相位不均匀性被削弱,反而使口面利用率再次回复,并且随着反相场的加强而增大。反相场刚出现的这一点也就规定了增益(或波束宽)指标能够到达的下限。同理,  $D_H$  继续增加会出现边缘场的多次相位反转,增益也随之波动达到多个极值点,其极小值不低于两分支汇合处的第一极小值,极大值甚至超过主单值支的上限。此时,  $H$  面呈现的是从等效相位中心发出的近似球面波被该口面所截的  $n$  多个波长的投影,其整体幅度是沿  $D_H$  的一个半波长余弦分布,相位从口面中心每隔一定间隔反转一次。当  $D_H \rightarrow \infty$ ,所有同相场和反相场的总体贡献收敛于一个确定数值,因此由图 2,图 4,图 6 看出,  $G$  或  $\theta_{0.5H0}$ ,  $\theta_{0.5E0}$  最终趋于不再随尺寸变动。

### 3.3 解向量的存在条件和唯一与否

收敛域全图表明,当所给指标不超出对应的收敛域界限时,存在满足式(9)的多个解向量,其中的最小尺寸值是口面场正常分布下的实用设计值。

主单值支的收敛域边界对应的指标容限为:

- 当固定  $\theta_{0.5H0} = 30^\circ$ ,  $\theta_{0.5E0} = 30^\circ$  时,  $G_0$  的容许变动范围为 [14.66611 dB, 15.815 dB];
- 当固定  $G_0 = 14.66611$  dB,  $\theta_{0.5E0} = 30^\circ$  时,  $\theta_{0.5H0}$  的容许变动范围为 [30°, 38.726°];
- 当固定  $G_0 = 14.66611$  dB,  $\theta_{0.5H0} = 30^\circ$  时,  $\theta_{0.5E0}$  的容许变动范围为 [30°, 38.750°]。

## 4 设计实例

设计 S 波段角锥喇叭天线。

万方数据

### 4.1 设计要求

中心频率  $f_0 = 3.08$  GHz, 增益为 15 dB。馈电波导采用 S 波段标准波导:  $a \times b = 72.14 \times 34.04$  mm<sup>2</sup>。

### 4.2 设计值

将增益  $G_0 = 15$  dB, 主波束宽度  $\theta_{0.5H0} = 30^\circ$ ,  $\theta_{0.5E0} = 28^\circ$  代入式(8)的右端项,求解约束方程组得到一组尺寸:

$$\begin{aligned} D_H &= 255.49 \text{ mm} \\ D_E &= 189.26 \text{ mm} \\ H &= 122.43 \text{ mm} \end{aligned}$$

### 4.3 结果对比

依据这组尺寸实际加工了二个角锥天线。对该天线作回代计算, HFSS 仿真和实物测量。结果如下:

#### (1) 远场

图 7 和图 8 是归一化远场幅度的回代计算值、HFSS 仿真值和测量值结果对比。说明:测量的频率点是 3.1 GHz。

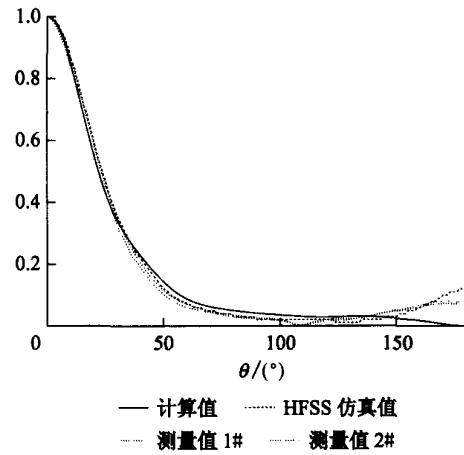


图 7 H-面归一化远场幅度

#### (2) 主波束宽度

主波束宽度的计算值、仿真值和测量值如表 1 所示。

主面波束宽度的回代计算值与指定指标相同,表明算法收敛;计算值与仿真或测量值间的误差是分析式(2)本身引起的,与求根算法无关。

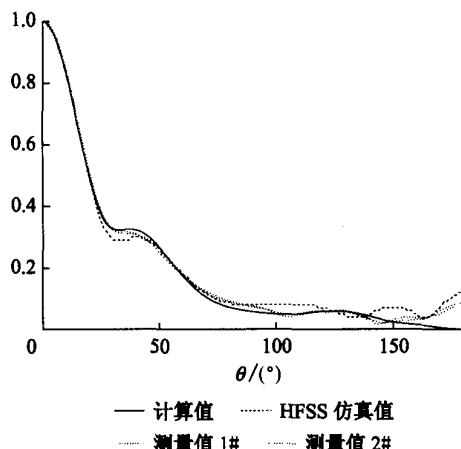


图 8 E-面归一化远场幅度

表 1 主波束宽度的计算值、仿真值和测量值

	计算值	仿真值	测量值
$\theta_{0.5H}$	30°	32°	31.73° 1# 31.52° 2#
$\theta_{0.5E}$	28°	28°	27.64° 1# 27.98° 2#

### (3) 增益

- a) 计算值 = 15.001 dB;
- b) 仿真值 = 15.33 dB;
- c) 测量值 = 15.17 dB 1#;  
15.28 dB 2#。

同理,增益的回代计算值与指标相同也表明了算法收敛;而计算值与仿真或测量值间的误差是式(6)本身包含的,与求根算法无关。

## 5 结论

文章实现了全局收敛改进的 Newton-Raphson 算法在天线设计中的应用,使多参数综合的逆问题一次性严格求解成为可能;描画出角锥天线设计尺寸收敛域的完整图界。发现收敛域的分布显示多值和有界两个特征,是角锥天线尺寸形状,口面场,天线性能之间物理关联的呈现。由此回答了矢量方程(9)解向量的存在条件和唯一与否。采用本文论述的设计方法,通过实物研制与测试和仿真验证了方法的正确性。易于推广到已知分析函数的任何其它器件设计问题上。

## 参考文献

- [1] 廖承恩.微波技术基础[M].西安:西安电子科技大学出版社,1994.
- [2] 谢处方,邱文杰.天线原理与设计[M].西安:西北电讯工程学院出版社,1985.
- [3] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling. C 数值算法[M].北京:电子工业出版社,2004.

(上接第 32 页)

## 3 结束语

本文根据工程应用的需要,首先阐述了传统使用 DSP 实现 CZT 所面对的不足,然后从 CZT 的原理出发,提出了基于 FPGA 硬件平台实现 CZT 的方法。试验证明该方法的实时性比传统使用 DSP 实现显著提高,并且易于硬件实现,具有较高的工程应用推广价值。

## 参考文献

- [1] 项春,董浩,周敏.基于频谱校正理论的全息谱研究[J].煤矿机械,2007,(6):55-58.
- [2] 俞宁.CZT-ZDFT 算法及实现[J].武汉水利电力学报,2001,4(2):126-136.
- [3] 王世一.数字信号处理[M].北京:北京理工大学出版社,1986.
- [4] 丁康,张晓飞.频谱校正理论的发展[J].振动工程学报,2003,3(1):14-22.
- [5] 魏红亮,李明.一种快速的 DBS 多普勒中心的估计方法[J].制导与引信,2009,30(1):42-45.

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立,一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养;后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com)),现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地,成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程,广受客户好评;并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书,帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司,以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年, 10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养, 更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果, 又能免除您舟车劳顿的辛苦, 学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲, 结合实际工程案例, 直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>