

# 二维反射面天线上电磁波传播的辛几何方法

吴先良, 唐 静, 赵 瑾, 陈东方, 李世雄

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽合肥 230039)

**摘 要:** 文中采用辛几何方法得到了二维反射天线上电磁波传播问题的解. 通过引入与原物理向量数量相同的新向量, 与原物理向量一起组成一个辛空间, 把物理空间上的传播问题推广到辛空间进行求解, 得到了更为精确的结果.

**关键词:** 辛几何理论; 渐近方法; 焦散区; 反射天线

**中图分类号:** TN80 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2002)09-1402-03

## Study on Electromagnetic Wave Propagation in a Two-Dimension Reflector Antenna by Symplectic Geometrical Theory

Wu Xian-liang<sup>1</sup>, TANG Jing<sup>1</sup>, ZHAO Jin<sup>1</sup>, CHEN Dong-fang<sup>1</sup>, LI Shi-xiong<sup>2</sup>

(1. Elec Eng&Info Sci Dept Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China;

2. Math Dept, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract:** Solution on electromagnetic wave propagation in a two-dimensional reflector antenna by Symplectic Geometrical Theory has been gotten. At first, the new vectors having the same numbers with these original physical vectors are introduced. The new vectors combine with those original physical vectors to form a symplectic space. The propagating problem in the physical space is promoted to Langrange manifold in the symplectic space, with better result obtained.

**Key words:** symplectic geometrical theory; asymptotic method; caustic field; reflector antenna

### 1 引言

焦散区电磁波传播的计算是一个难题. 目前, 焦散区求解的传统方法有等效电磁流法 (ECM) 和物理绕射理论 (PTD), 但它们都有一定程度的不足之处. 当几何光学 (GO) 变化区域与衍射射线重叠, 或在几何光学射线的焦散区, ECM 方法无法求解. 同时, 解的精度较差. PTD 方法的问题是最后积分的计算比较困难, 所以它的应用是有限的. 因此, 有必要研究焦散区电磁波传播的计算方法.

本文引入了与物理空间相同数量的波向量空间, 由波动向量空间与物理空间组成辛空间, 把物理空间的传播问题提升到辛空间上的 Langrange 流形<sup>[1]</sup>. 当 Langrange 流形投影到物理空间, 出现了奇性. 只要投影方向适当变化, 奇性将消失. 在这个方向, 基本的高频渐近方法是有效的, 然后通过 Fourier 逆变换把解从混合空间转换到物理空间. 这样, 用辛几何方法得到了二维圆形反射天线的解. 通过与经典方法的比较得知, 辛几何方法得到的解更为精确、有效.

### 2 二维圆形反射天线焦散区的辛几何描述

如图1所示, 假设  $R$  是圆的半径, 反射点的坐标是

( $R\cos\theta, R\sin\theta$ ). 射线函数如下:

$$(y - R\sin\theta)\cos 2\theta - (x - R\cos\theta)\sin 2\theta = 0 \quad (1)$$

对方程两边微分, 得:

$$\begin{aligned} & -R\cos\theta\cos 2\theta - \mathcal{L}(x - R\cos\theta)\cos 2\theta \\ & - R\sin\theta\sin 2\theta - \mathcal{L}(y - R\sin\theta)\sin 2\theta = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

结合方程(1)和(2), 得到焦散区射线函数, 用图表示如下:

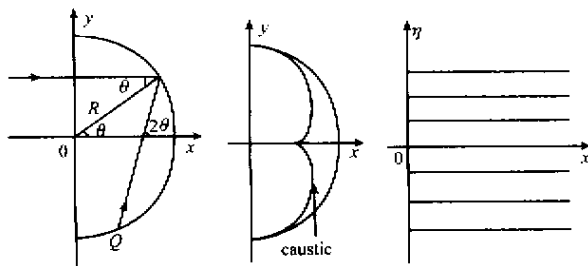


图1 入射线与反射射线区

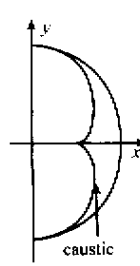


图2 圆形反射天线焦散

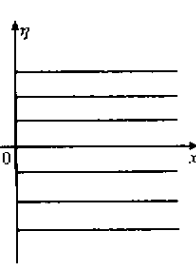


图3 空间(x, eta)中的射线

### 3 二维圆形反射天线的解

考虑只有一次反射的二维圆形反射天线, 电磁波动方程为:

$$\Delta^2 u + k^2 u = 0 \quad (3)$$

在空间  $(x, y)$  假设方程 (3) 的解的表达式为:

$$u(x, y, k) = a(x, y, k) e^{-ik\phi(x, y)} \quad (4)$$

这里  $\phi(x, y)$  是相位,  $a(x, y, k)$  是振幅. 将相位按级数展开, 带入方程 (3) 和 (4), 得到方程 Eikonal. 首先, 引入两个新的变量  $\xi = \partial\phi/\partial x$  和  $\eta = \partial\phi/\partial y$ , 它们与原来的物理空间一起组成四维的辛空间  $(x, y, \xi, \eta)$ .

Hamilton 函数为:

$$H(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2}[\xi^2 + \eta^2 - 1]$$

辛空间的轨迹线方程为方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi} = \xi \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta} = \eta \\ \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

初始条件为:

$$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, \xi = \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{\substack{x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta}} = -\cos 2\theta,$$

$$\eta = \left. \frac{\partial\phi}{\partial y} \right|_{\substack{x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta}} = -\sin 2\theta, \phi_0 = R\sin\theta.$$

$$\text{方程 (5) 的解为: } \begin{cases} x = R\cos\theta - t\cos 2\theta \\ y = R\sin\theta - t\sin 2\theta \\ \xi = -\cos 2\theta \\ \eta = -\sin 2\theta \end{cases} \quad (6)$$

相位为  $\phi(x(\theta, t), y(\theta, t))$  为:

$$\phi(x(\theta, t), y(\theta, t)) = \phi_0 + \int_0^t \frac{d\phi}{dt} dt = R\cos\theta + t \quad (7)$$

然后, 解出振幅  $a(x, y, k)$ . 当  $k \rightarrow 0$ , 存在 GO 能量密度方程:

$$a(x, y, k) \sqrt{\mathcal{K}(x, y)} = a(x, y, k) \bigg|_{\substack{x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta}} \sqrt{\mathcal{K}(x, y)} \bigg|_{t=0} = \sqrt{R\cos\theta} = \text{Const} \quad (8)$$

这里  $\mathcal{K}(x, y) = -2t + R\cos\theta$  从方程 (8) 可知,

$$a_0(x, y) = a(x, y, k) = \sqrt{R\cos\theta} / \sqrt{-2t + R\cos\theta} \\ = \sqrt{R\cos\theta} / \sqrt{|-2t + R\cos\theta|}.$$

因此, GO 解如下:

$$u(x(\theta, t), y(\theta, t), k) = a(x, y, k) e^{-ik\phi(x, y)} \\ = \sqrt{R\cos\theta} / \sqrt{|-2t + R\cos\theta|} e^{-ik(R\cos\theta + t)} \quad (9)$$

取  $\mathcal{K}(x, y) = 0$  即  $t = \frac{1}{2} R\cos\theta$ , 有振幅  $a_0(x, y) \rightarrow \infty$ . 可见, 这里出现了焦散现象, 解 (9) 在焦散区无效.

#### 4 二维园形反射天线的辛解

首先, 把方程 (4) 进行 Fourier 变换, 并把一些变量从空间  $(x, y)$  提升到辛空间  $(x, \eta)$  得到方程:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2(1 - \eta^2)v = 0 \quad (10)$$

在空间  $(x, \eta)$  考虑方程 (10), 假设解为:

$$u(x, \eta, k) = b(x, \eta, k) e^{-ik\psi(x, \eta)} \quad (11)$$

这里  $\psi(x, \eta)$  是相位,  $b(x, \eta, k)$  是振幅.

引入两个新的变量  $p = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial\psi}{\partial \eta}$ , 于是 Hamilton 函数为:

$$H(x, \eta, p, q) = \frac{1}{2}[p^2 + q^2 - 1] \quad (12)$$

辛空间  $(x, y, p, q)$  的迹线方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta} = -\eta \end{cases} \quad (13)$$

其初始条件为:

$$x = x_0 = R\cos\theta, \eta = \eta_0 = -R\sin 2\theta,$$

$$p = \left. \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \eta=\eta_0}} = -\cos 2\theta, q = \left. \frac{\partial\psi}{\partial \eta} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \eta=\eta_0}} = -R\sin\theta$$

$$\text{方程 (13) 的解为: } \begin{cases} x = R\cos\theta - t\cos 2\theta \\ \eta = -\sin 2\theta \\ p = -\cos 2\theta \\ q = -R\sin\theta + t\sin 2\theta \end{cases} \quad (14)$$

通过 Legendre 变换, 得到:

$$\psi(x(\theta, t), \eta(\theta, t)) = \phi(x, y(x, \eta)) - \eta(x, \eta) \\ = R\cos\theta + t - (-\sin 2\theta)(R\sin\theta - t\sin 2\theta) \quad (15)$$

然后, 计算振幅  $b(x, \eta, k)$  当  $k \rightarrow \infty$  时, 渐近解取第一项, 即:  $b(x, \eta, k) \approx b_0(x, \eta)$  从方程 (8) 可以知道:

$$b(x, \eta, k) \sqrt{\mathcal{K}(x, \eta)} = \text{Const} = a(x, y, k) \sqrt{\mathcal{K}(x, y)} = \sqrt{R\cos\theta} \quad (16)$$

这里,

$$\mathcal{K}(x, \eta) = \left| \frac{\mathcal{X}(x, \eta)}{\mathcal{X}(\theta, t)} \right| = \left| \frac{\frac{\partial x}{\partial \theta}}{\frac{\partial x}{\partial \theta}} \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \right| = -2\cos^2 2\theta \quad (17)$$

于是

$$b_0(x(\theta, t), \eta(\theta, t)) = b_0(x(\theta, t), \eta(\theta, t), k) \\ = \sqrt{R\cos\theta / 2\cos^2 2\theta} \quad (18)$$

因此有:

$$u(x(\theta, t), \eta(\theta, t), k) = b_0(x(\theta, t), \eta(\theta, t)) e^{-ik\psi(x, \eta)} \\ = \sqrt{R\cos\theta / 2\cos^2 2\theta} e^{-ik(R\cos\theta(1+2\sin^2\theta) + t\cos^2 2\theta)} \quad (19)$$

用 Fourier 逆变换将空间  $(x, \eta)$  上的解  $u(x(\theta, t), \eta(\theta, t), k)$  变换到物理空间  $(x, y)$  中的解  $u(x, y, k)$ :

$$u(x, y, k) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \sqrt{R\cos\theta / 2\cos^2 2\theta} \\ \cdot g e^{-ik(R\cos\theta(1+2\sin^2\theta) + t\cos^2 2\theta)} e^{iky\eta} d\eta \quad (20)$$

方程 (20) 是隐函数的积分, 能用稳相点方法计算. 当存在二阶或三阶稳相点时, 需要对稳相点方法进行改进.

首先, 从  $\frac{\partial}{\partial \eta}(\psi(x, \eta) + \eta y) = 0$  得到稳相点  $y = R \sin \theta - t \sin 2\theta$ , 这就是方程(6)的第二个方程, 说明了稳相点在Lanrange 流形上.

对于二阶稳相

点, 即当  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{R \cos \theta - 2t}{2 \cos^2 2\theta} = 0$ , 且  $\theta \neq 0$ ,  $\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \neq 0$  时, 应该用如下改进的二阶稳相点方法:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{i\omega \phi(x)} dx \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}} \left( \frac{6}{\omega \phi'''(x_0)} \right)^{\frac{1}{3}} e^{i\omega \phi(x_0)} g a_0(x) + O\left(\frac{1}{\omega^{2/3}}\right) \quad (21) \end{aligned}$$

$\mathcal{K}(\omega)$  可以通过数值计算得到. 把方程(21)带入方程(20), 即得到辛高频渐近解.

从图 5 可以看出, 沿  $X$  轴方向 GO 解在焦散区接近无穷大, 而辛几何解仍然是有效的. 在远离

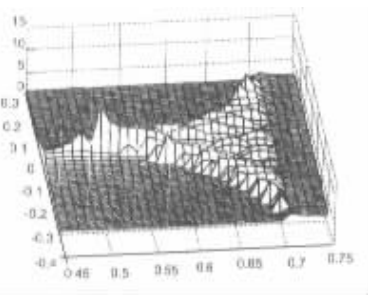


图 4 二维圆形反射天线计算结果

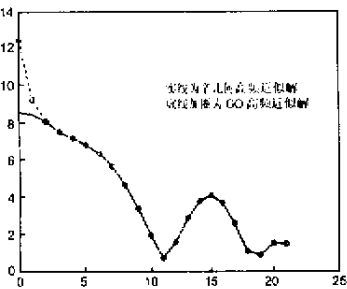


图 5 沿  $X$  轴方向 GO 解与辛解比较

焦散区的地方, GO 解与辛解是一致的. 这证明了辛几何解的正确性, 而且它克服了传统方法的缺点. 在解决焦散区的问题时, 是一个值得深入研究的方法.

#### 参考文献:

- [1] 李世雄. 高频近似与辛几何 [M]. 北京: 北京科学出版社, 1999.
- [2] Gorman, A D, Aderson S P, Mohinda R B. On Caustic related to several common indices of refraction [J]. Radio Science, 1986, 21(3): 434 - 436.
- [3] Ziolkowski R W, Deschamps G A. Asymptotic evaluation of high-frequency field near a caustic: An introduce to Maslov's method [J]. Radio Sci, 1984, 19(4).
- [4] Thomson C J, Champan C H. An introduce to maslov's asymptotic method Geophys [J]. J R Astr Sci, 1985, 83: 143 - 168.
- [5] Kohei Hongo, Hirokazu Kobayashi. Radiation characteristics of a plane-convex lens antenna, Radio Science [J], 1996, 31(5): 1025 - 1035.

#### 作者简介:



吴先良 男, 1955 年出生于安徽, 1982 年毕业于安徽大学电子工程与信息科学系, 现为安徽大学计算机科学与信息工程学院教授, 中国电子学会高级会员, 主要从事电磁散射、电磁理论和数值方法研究工作, 出版专著两部, 发表论文 40 余篇.

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深, 让许多工程师望而却步, 然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上, 我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识, 借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养, 推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程, 化繁为简, 直观易学, 可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛, 让天线设计不再难...



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书, 课程从基础讲起, 内容由浅入深, 理论介绍和实际操作讲解相结合, 全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程, 可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计, 让天线设计不再难...

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程, 由经验丰富的专家授课, 旨在帮助您从零开始, 全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程, 边操作边讲解, 直观易学; 购买套装同时赠送 3 个月在线答疑, 帮您解答学习中遇到的问题, 让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程, 培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合, 全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作, 同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习, 可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试...

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训：

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力和专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com))，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势：

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

## 联系我们：

- ※ 易迪拓培训官网：<http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网：<http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店：<http://shop36920890.taobao.com>