

基于抗差估计和加权最小二乘的天线曲面拟合算法

李 干^{1,2}, 李宗春¹, 杨晓晖³, 耿彦龙⁴

(1. 信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052; 2. 72946 部队, 山东 淄博 255020;

3. 61037 部队, 山西 侯马 043000; 4. 61363 部队, 陕西 西安 710054)

摘要: 天线曲面拟合是天线面型评价的关键。以标准旋转抛物面天线曲面为例, 阐述最小二乘拟合算法的基本原理和方法, 给出天线曲面评价指标, 提出了一种基于抗差估计和加权最小二乘的拟合新算法, 采用 IGGIII 权函数进行后验定权。通过一组仿真数据验证新算法的有效性, 结果表明新算法具有良好的拟合效果, 拟合结果是曲面拟合参数的最小方差线性无偏估计, 使得拟合曲面更接近设计曲面。

关键词: 标准抛物面; 曲面拟合; 抗差估计; 加权; 参数; 表面精度

一、引言

反射面天线已广泛应用于卫星通信、雷达技术、宇宙探索、地面跟踪及射电天文等现代技术领域中, 其目的是保证天线电性能指标^[1]。然而, 天线电性能指标在很大程度上依赖于曲面表面精度, 天线曲面误差越小, 其电性能就越好, 因而, 准确获得最佳拟合曲面及其形变量对于衡量天线的电性能就显得尤为重要。

天线曲面拟合关注天线曲面的形状、位姿、表面精度等信息。文献[2]给出了天线表面精度的定义以及 3 种计算天线曲面位姿的方法; 文献[3-4]给出一种天线表面误差的计算方法, 用来精确计算变形表面法向、径向及轴向误差, 并推导了计算公式; 文献[5-6]给出了几种测量系统在天线测量中的应用; 文献[7]给出了天线曲面测量不确定度的评价方法。这些文献在拟合天线曲面时都是采用的等权最小二乘拟合算法, 并没有考虑参与拟合点的权值和可能存在的粗差点对曲面拟合结果的影响, 简称 LS (Least Squares) 算法。实际上参与曲面拟合点是不等权的, 本文研究基于抗差估计和加权最小二乘的天线曲面拟合算法, 简称 RWLS (Robust estimation and Weighted least squares) 算法。

二、天线曲面拟合基本原理

天线面型测量实质: 通过一定测量手段获取天线表面离散点的三维坐标后, 进行曲面拟合, 以确定天线曲面的形状、位姿、表面精度等机械性能参数, 并对其机械性能进行干预和评价。

设天线曲面方程为

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

记天线设计坐标系下的点为 $X = (x, y, z)^T$, 测量坐标系下的点为 $X' = (x', y', z')^T$, 一般情况下两坐标系是不一致的, 两者之间的坐标转换关系为

$$X = kRX' + M \quad (2)$$

其中, 旋转矩阵 R 和平移向量 M 为天线曲面的位置参数; 尺度因子 k 为形状参数^[3]。

另将天线的焦距 f 也定义为形状参数^[3]。令 $Q = [F, k, R, M, f]$, 则参数向量 Q 完整地描述了天线曲面的形状和位置, 天线曲面拟合的实质就是在一定约束条件下对参数向量 P 进行最优估计, 统计表面精度, 并对测量结果进行分析评价。

天线曲面拟合主要评价指标包括表面精度和表面精度测量不确定度。表面精度也称轮廓度, 它反映的是实际轮廓面与理想轮廓面的符合程度, 是针对任意曲面偏离设计给定的形状而提出的技术指标^[8]。

文献[2]将天线表面精度定义为各离散点与设计曲面之间法向偏差的均方根值 δ_{rms} , 即

$$\delta_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2} \quad (3)$$

式中, n 为测量点的个数; Δ_i 为测量点 i 到设计曲面的法向偏差。

另外, 天线表面精度还可以用离散点法向偏差的峰峰值表示, 即以各离散点与设计曲面 (或最佳吻合面) 之间法向偏差的最大值和最小值之差作为曲面轮廓度, 记为 w

$$w = \Delta_{\max} - \Delta_{\min} \quad (4)$$

表面精度测量不确定度用于表征测量结果的质

收稿日期: 2012-06-28

作者简介: 李 干 (1985—), 男, 江苏盐城人, 硕士生, 主要研究方向为精密工程测量技术与仪器, 天线几何量测量及大型设备精密安装测量等。

量^[9],设通过一定方法得到 m 个表征天线表面精度的峰峰值 $w = \{w_i | i=1, \dots, m\}$, 则其测量不确定度为

$$\sigma_w = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (w_i - \bar{w})^2}{m-1}} \quad (5)$$

式中, $\bar{w}$ 为 m 个峰峰值的均值。

三、天线曲面拟合法

天线曲面拟合的核心思想:通过一批离散点确定一个曲面设计坐标系,然后在该坐标系下统计离散点与设计曲面的偏差,进而评价曲面的质量。因此,合理、准确地确定设计坐标系是关键。

1. LS 拟合法

以标准旋转抛物面为例,其在设计坐标系下的方程为

$$x^2 + y^2 = 4fz \quad (6)$$

$$\text{或} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4fz + z^2 \quad (7)$$

设计坐标系与测量坐标系之间存在 3 个平移参数 (X_0, Y_0, Z_0), 3 个旋转参数 ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$), 由于旋转抛物面的特殊性 (设计坐标系的 x 轴可以任意指定, 所以 ε_z 有无穷多个解), 可以固定 ε_z 为常数 (通常设 $\varepsilon_z = 0$, 然后在坐标转换后重新计算), 即待估参数为 $T = (X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y)$ 。则设计坐标系与测量坐标系之间的转换关系为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y & -\cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \\ 0 & \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_y & -\sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' - X_0 \\ y' - Y_0 \\ z' - Z_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

将式(8)转化为测量坐标系下并构造函数

$$F = (x' - X_0)^2 + (y' - Y_0)^2 + (z' - Z_0)^2 - (4fz + z^2) \quad (9)$$

将式(9)线性化得误差方程为

$$v_i = \left[\frac{\partial F}{\partial X_0} \quad \frac{\partial F}{\partial Y_0} \quad \frac{\partial F}{\partial Z_0} \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_y} \right] dt - F_i \quad (10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_0} &= -2(x' - X_0) + \sin \varepsilon_y (4f + 2z) \\ \frac{\partial F}{\partial Y_0} &= -2(y' - Y_0) - \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y (4f + 2z) \\ \frac{\partial F}{\partial Z_0} &= -2(z' - Z_0) + \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y (4f + 2z) \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} &= y \cos \varepsilon_y \cos \varepsilon_z (4f + 2z) \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_y} &= -x(4f + 2z) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

n 个测量点的误差方程可表示为

$$\underset{n \times 1}{V} = \underset{n \times n}{A} \underset{n \times 1}{dT} - \underset{n \times 1}{F} \quad (12)$$

由最小二乘原则 $\min \rightarrow V^T P V$ 得参数 T 的解为

$$T = T_0 + dT = T_0 + (A^T P A)^{-1} A^T P F \quad (13)$$

式中, T_0 为参数初值; P 为参与拟合点的权值。

单位权中误差为

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T P V}{n-t}} \quad (14)$$

式中, t 为未知参数个数, 这里一般取 $t=5$ (固定焦距) 或 $t=6$ (不固定焦距)。

一般 LS 拟合法, 式(13)中 $P=I$, 这使得偏差较大点和偏差较小点被赋予相同的权值, 亦即所有拟合点对确定设计坐标系的贡献量相等, 这样得到的面型精度是不真实的; 同时由于制造、安装、测量带来的粗差, 参与拟合的点可能存在一些粗差点, 如果将这些点当成好点, 会影响拟合精度, 给相邻点造成“虚假误差”。如果能合理的赋予参与拟合点的权值, 增大偏差较小点的权重, 减小偏差较大点的权重, 准确地剔除粗差点, 就能得到真实的面型精度和各个拟合点的偏差值, 能更加客观反映面型精度并指导面型调整。

2. RWLS 拟合法

拟合天线曲面时尽量希望以实际偏差较小的离散点来确定曲面设计坐标系, 或者说确定曲面设计坐标系时更相信点位偏差较小的离散点, 反映在拟合权阵上, 即点位偏差 (包括测量误差和点位实际偏差) 越小, 其对确定设计坐标系的贡献应增大, 相应的权重越大; 反之, 点位偏差越大, 其对确定设计坐标系的贡献应减少, 相应的权重越小。

据此, 引入权系数 $d_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 权矩阵 P 可表示为

$$P = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

同时, 从最小二乘参数解可知, 残差二次型 $V^T P V$ 对粗差过于敏感, 单个粗差可能造成整个曲面拟合严重失真, 权阵 P 虽然降低了粗差点的权重, 但实际上对于粗差点, 理想状态是能准确剔除粗差点, 尽可能减免粗差对未知参量估值的影响。为解决这个问题, 引入抗差估计的思想, 对权阵进行进一步改化, 使用 $\bar{P}$ 代替先验权 P 。

等价权 $\bar{P}$ 可以有多种形式, 如 Fair 函数法、丹麦法、Hamper 法、IGGI 法等, 本文采用 IGGIII, 其等价

权形式为

$$\bar{d}_i = \begin{cases} 1 & \left| \frac{V_i}{\sigma_0} \right| < k_0 \\ \frac{k_0}{\left| \frac{V_i}{\sigma_0} \right|} \left(\frac{k_1 - \left| \frac{V_i}{\sigma_0} \right|}{k_1 - k_0} \right) & k_0 \leq \left| \frac{V_i}{\sigma_0} \right| \leq k_1 \\ 0, & k_1 < \left| \frac{V_i}{\sigma_0} \right| \end{cases} \quad (16)$$

这里以法向偏差大小确定权值,对于参与天线曲面拟合的离散点,其点位法向偏差一般近似服从正态分布,由误差理论来看,误差在 $\pm 1.5\sigma_0$ 以外的概率仅为 0.13,限外之点位既不能完全否定,又要限制其有害作用, k_0 可取 1.5;误差在 $\pm 2.5\sigma_0$ 以外的概率仅为 0.01,可将其淘汰(淘汰点不参与曲面拟合,但参与面型的评价), k_1 可取 2.5; σ_0 为均方差因子; V_i 为点位标准化法向偏差。

根据抗差估计原理,得参数 T 的抗差解为

$$T = T_0 + dT = T_0 + (A^T \bar{P} A)^{-1} A^T \bar{P} F \quad (17)$$

单位权中误差

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n - t - m}} \quad (18)$$

式中: t 为未知参数个数, m 为被淘汰点的个数。

式(17)是式(12)的抗差加权解,但式(17)一般采用迭代解,第 $k+1$ 步的迭代解为式。

$$T^{k+1} = T_0 + dT^{k+1} = T_0 + (A^T \bar{P}^k A)^{-1} A^T \bar{P}^k F \quad (19)$$

式中, $\bar{P}^k$ 是用 k 次迭代残差计算的等价权,设迭代限差为某一小值常数 ε ,直到 $\max |T^{k+1} - T^k| \leq \varepsilon$ 时,停止迭代。

算法的核心是如何合理准确地确定权系数的大小。

由于在拟合前无法准确知道各拟合点的偏差大小,但根据实际经验,在传统的等权观测算法下,点位法向误差较大点一般就是实际偏差较大点,只

是计算反映出的偏差往往比实际偏差要小,故可采用验后定权的思路,基本过程为:①按等权进行最小二乘曲面拟合,统计参与拟合点的法向误差 Δ_i^0 ;②按式(16)计算各点的权值 d_i ,根据新的权矩阵 $\bar{P}$ 进行加权最小二乘曲面拟合,统计参与拟合点的法向误差 Δ_i^k (k 表示第 k 次迭代);③重复第 2 步,直到 $\max |T^{k+1} - T^k| \leq \varepsilon$ (ε 为某一小值常数),停止迭代。

四、仿真分析

现有一标准旋转抛物面天线,已知天线口径 $D = 700$ mm,设计焦距 $f = 260.000$ mm,在其表面沿 8 条母线方向采样 48 个点,记为 $A_i = (x_i, y_i, z_i)^T$,点位分布如图 1 所示。

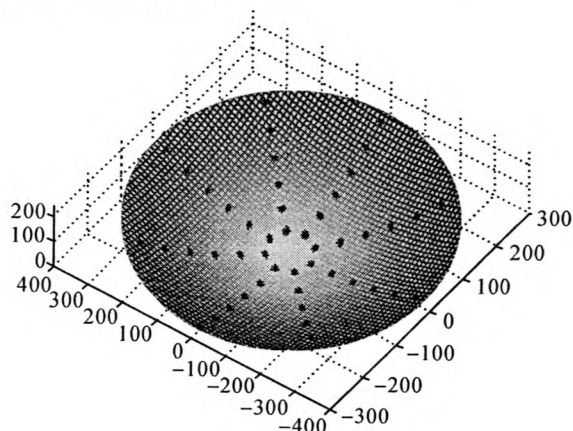


图 1 模拟天线示意图

在设计坐标上叠加服从正态分布的扰动 ($\sigma_x = 2.0$ mm, $\sigma_y = 2.0$ mm, $\sigma_z = 2.0$ mm),在 A_9 、 A_{23} 、 A_{37} 的 Z 坐标方向上分别加入 (+5 mm, +7 mm, -10 mm) 的粗差,得到一组曲面离散点数据。直接在曲面设计坐标系下进行绝对比对,则平移和旋转参数都为 0,表面精度为 ± 2.206 mm。分别采用 LS 算法、RWLS 算法拟合曲面,得到参数 T 拟合结果如表 1 所示。

表 1 LS、RWLS 曲面拟合算法结果比较

算 法	参数 T					设计原点 偏移量/mm	表面精度 /mm
	X_0 /mm	Y_0 /mm	Z_0 /mm	$\varepsilon_x(^{\circ})$	$\varepsilon_y(^{\circ})$		
绝对比对	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	± 2.206
LS	4.326	-1.311	-0.148	-0.184	-0.234	4.523	± 2.068
RWLS	2.197	0.258	0.325	-0.023	-0.126	2.236	± 2.102

各点的法向偏差如图 2 所示。

从表 1 和图 2 的结果可以得出:RWLS 算法得

出的曲面位置偏移量为 2.236 mm,姿态偏转量为 (-0.023° , -0.126°),都明显小于 LS 算法得出的

位置偏移量 4.523 mm,姿态偏转量 (-0.184° , -0.234°),说明 RWLS 算法更能真实地反映曲面的位置、姿态以及面型精度。

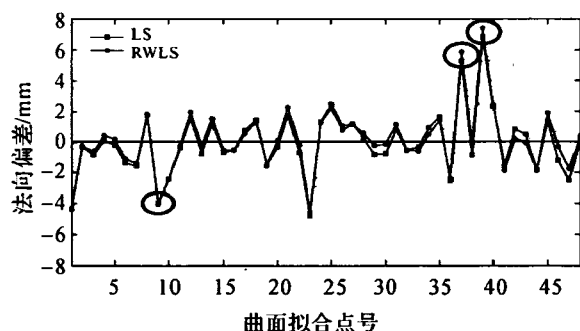


图2 LS、RWLS 曲面拟合法向偏差比较

另外,从法向偏差图可以看出,RWLS 算法得出偏差大的点的残差绝对值大于 LS 算法得出的,且两种算法也导致偏差大的点周围的点的偏差有所不同,分析原因主要是:LS 算法为了使总均方根值达到最小,照顾了偏差较大的点,方差大的项的拟合程度就好,而方差小的项的拟合程度就差,所得结果是参数的无偏估计,但不是最小方差线性无偏估计;RWLS 算法通过对不同偏差点赋予不同的权,且剔除了偏差较大的粗差点,均衡了各点对拟合结果的影响,所得结果是参数的最小方差线性无偏估计。

五、结束语

本文提出基于抗差估计和加权最小二乘的天线曲面拟合算法,根据拟合点法向偏差,采用验后定

权的思路及 IGGIII 权函数确定参与曲面拟合点的权系数,通过一组仿真数据比较了 LS 算法和 RWLS 算法的优劣,结果表明 RWLS 算法拟合效果更优,使得拟合曲面更接近设计曲面。

参考文献:

- [1] SINTON S, RAHMAT—SAMII Y. Random Surface Error Effects on Offset Cylindrical Reflector Antennas[J]. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 2003, 51(6): 1331-1337.
- [2] 李宗春,李广云. 天线几何量测量理论及其应用[M]. 北京:测绘出版社,2009.
- [3] 王从思,段宝岩,仇原鹰,等. 一种抛物面天线形状误差的合理评价方法[J]. 上海理工大学学报,2006,28(1):15-18.
- [4] 王从思,段宝岩,仇原鹰. 天线表面误差的精确计算方法及电性能分析[J]. 电波科学学报,2006,21(3): 403-407.
- [5] 于江,蒋山平,杨林华. 基于数字近景摄影测量的天线变形测量[J]. 航天器环境工程,2008,25(1):56-58.
- [6] 金超,张旺,赵均红. 全站仪在天线测量中的应用[J]. 天线技术,2005,35(10):41-42.
- [7] 张曦,胡春华,陈五一. 二次曲面拟合与拟合参数不确定度分析[J]. 北京航空航天大学学报,2006,32(9): 1091-1095.
- [8] 王林艳,王建华. 基于坐标法的复杂曲面轮廓度的误差评定[J]. 西安工业学院学报,2006,26(3):27-31.
- [9] LI Gan, LI Zongchun, LU Shu. Evaluation Method for Measurement Uncertainty of Antenna Surface Accuracy [J]. Applied Mechanics, 2012(105):2063-2068.

(上接第 69 页)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}' \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 且满}$$

足 $\mathbf{Q}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}' \\ 0 \end{pmatrix}$, 套用式(7)~式(11), 求出

$$\begin{cases} \hat{x}_1'' = -6.22 \text{ mm} \\ \hat{x}_2'' = 4.57 \text{ mm} \end{cases}, \text{ 将该结果回代入式(13), 即可求}$$

出观测值改正数,从而可求出单位权中误差为 $\sigma_0 =$

$$\pm \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{n-l}} = \pm 7.29 \text{ mm}.$$

四、结束语

利于 Givens 正交变换来求解未知数的最小二

乘解,可以逐个处理观测方程,不需要解算法方程;在观测量有所增加的情况下,可以利用前期的计算成果,减小计算量,适用于序贯平差,在平差的任何阶段,可以给出当前的结果。

参考文献:

- [1] 黄维彬. 基近代平差理论及其应用[M]. 北京:解放军出版社,1992.
- [2] 游祖吉,樊瑜瑜. 测量平差教程[M]. 北京:测绘出版社,1991.
- [3] 魏子卿. 用 Givens 变换解最小二乘问题[J]. 测绘工程,1996,5(2):2-7.
- [4] 王之卓. 摄影测量原理续编[M]. 北京:测绘出版社,1986.
- [5] 胡建华,陈兴同,曹德欣. 数值计算方法[M]. 徐州:中国矿业大学出版社,2008.

如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深, 让许多工程师望而却步, 然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上, 我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识, 借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训(www.edatop.com)专注于微波射频和天线设计人才的培养, 推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程, 化繁为简, 直观易学, 可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛, 让天线设计不再难...



HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书, 课程从基础讲起, 内容由浅入深, 理论介绍和实际操作讲解相结合, 全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程, 可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计, 让天线设计不再难...

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程, 由经验丰富的专家授课, 旨在帮助您从零开始, 全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程, 边操作边讲解, 直观易学; 购买套装同时赠送 3 个月在线答疑, 帮您解答学习中遇到的问题, 让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程, 培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合, 全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作, 同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习, 可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试...

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



关于易迪拓培训：

易迪拓培训(www.edatop.com)由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力和专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网(www.mweda.com)，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

我们的课程优势：

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

联系我们：

- ※ 易迪拓培训官网：<http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网：<http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店：<http://shop36920890.taobao.com>