广义逆在可展天线结构动力学分析中的应用

王 峰
(西安电子科技大学，陕西 西安 710071)

摘 要：对于复杂的构架可展天线结构，直接采用节点的3n个笛卡尔坐标为广义坐标建立动力学方程，其优点是在建立结构模型和动力学方程时，不必区分节点的约束和自由度。

关键词：广义逆；动力学方程；可展结构；零空间正交基

中图分类号：O313 **文献标识码**：A **文章编号**：1002-6673 (2008) 03-029-02

0 引言

讨论了空间可展结构展开过程分析的理论基础，介绍了广义逆矩阵理论及其应用，给出了可展结构的动力学关系；利用约束雅可比矩阵的零空间正交基引入一组准速率，得到独立的用于展开过程分析的动力学微分方程，结合广义逆矩阵与多体动力学理论，分析可展构架结构的展开运动过程。

1 Moore-Penrose 广义逆理论及应用

设 A 为 m×n 阶实矩阵，可利用豪斯荷尔德变换及变形 QR 算法对其进行奇异值分解，其奇异值分解式为：

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T$$

式中：U—m×m 阶的列正交矩阵（称为左奇异向量）；V—n×n 阶的列正交矩阵（称为右奇异向量）；$\Sigma=diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)(r\leqslant\min\{m,n\})$，且 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$，$\sigma_i(i=1,2,\cdots r)$称为矩阵 A 的奇异值。则 A 的广义逆为：

$$A^+=V_1\Sigma^{-1}U_1^T$$

式中：U_1—U 中前 r 列列正交向量组构成的 m×r 阶矩阵；V_1—V 中前 r 列列正交向量组构成的 n×r 阶矩阵。

2 构架可展天线结构的展开过程动力学分析

对于复杂的构架可展天线结构，直接采用节点的3n个笛卡尔坐标为广义坐标建立动力学方程，其优点是在建立结构模型和动力学方程时不必区分节点的约束和自由度。

将杆件的质量和速度转化到两端节点上，体系的动能表示为：

$$T=\frac{1}{2}\dot{X}^T M\dot{X} \tag{1}$$

式中：M—结构系统的等效质量矩阵，是一 3n×3n 阵；X—广义坐标。空间桁架结构的质量矩阵可推导如下；杆单元在局部坐标中的一致质量矩阵为：

$$M^{(e)}=\frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中：$M^{(e)}$—杆单元在局部坐标中的质量矩阵；ρ—杆单元的密度；A—杆单元的截面积；l—杆单元长度。然后通过下式将局部坐标系中的单元质量矩阵转换为整体坐标系中的单元质量矩阵：

$$M^{(e)}=T^{(e)T}m^{(e)}T^{(e)} \tag{3}$$

式中：M^{e}—杆单元在整体坐标系中的质量矩阵；$T^{(e)}$—单元坐标变换矩阵，有如下形式：

$$T^{(e)}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{bmatrix} \tag{4}$$

式中：cosα，cosβ，cosγ 分别为杆单元在整体坐标系中的三个方向余弦。求出整体坐标系中的单元刚度矩阵后，根据可展结构中各杆单元两端编号，应用有限单元法中组集整体刚度矩阵时“边定位，边累加”的方法得到整体坐标系中的质量矩阵 M。根据应用于刚体的第一类 Lagrange 方程：

$$\sum_{i=1}^{3n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}-\frac{\partial T}{\partial x_i}-Q\right)\Delta x_i$$

$$=(\Delta X)^T\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{X}}-\frac{\partial T}{\partial X}-Q\right)=0 \tag{5}$$

将动能表达式 (3) 代入式 (5) 可得构架式可展结构的动力学方程：

$$(\Delta X)^T(M\ddot{X}-Q)=0 \tag{6}$$

式中：Q—节点广义力。由于可展桁架之间存在着复杂的运动约束关系，直接选取的 3n 个广义坐标对应

收稿日期：2008-02-19
作者简介：王峰 (1973-)，男，陕西临潼人，在读硕士研究生。

的虚位移ΔX是不相互独立的，因此无法得出式中每一个括号等于零的结论。

为此需要构造可展结构的各类约束方程及其雅可比矩阵，通过求约束雅可比矩阵的 Moore-Penrose 广义逆，将约束方程嵌入动力学方程进行求解，具体方法如下：综合构架结构的约束可得到结构的几何约束方程组为：

$$\phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{3n})=0;\ i=1,2,\cdots,s \tag{7}$$

式中，x_i—选定的广义坐标；ϕ—和所选取的 3n 个广义坐标相关的函数；s—约束方程数。对时间求一次导数得：

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial X_j}\dot{X}_j+\frac{\partial\phi_i}{\partial t}=0 \tag{8}$$

因为所研究可展结构的约束一般均为定常约束（约束条件不随时间改变），所以有：

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial X_J}\dot{X}_J=0 \tag{9}$$

记作矩阵形式：

$$A\dot{X}=0 \tag{10}$$

式中：A—约束方程的雅可比矩阵，为 s×3n 矩阵。

采用求解广义逆矩阵方法中的奇异值分解法，求解雅可比矩阵的零空间正交基：

$$A_{s\times3n}=U_{s\times s}\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{s\times3n}V^T_{3n\times3n} \tag{11}$$

式中：U—s 阶正交矩阵，U= $[u_1,u_2,\cdots,u_s]$，$u_1,u_2,\cdots,u_s$—正交列向量；Σ_r—矩阵 A 的 r 个奇异值 σ_i $(i=1,\cdots,r)$ 组成的 r 阶对角阵；r—雅可比矩阵 A 的秩；V—3n 阶正交矩阵，V= $[v_1,v_2,\cdots,v_{3n}]$，$v_1,v_2,\cdots v_{3n}$—正交列向量。设：

$$P=3n-r \tag{12}$$

式中：P—雅可比矩阵 A 的零空间基底维数，称为可展结构系统的广义运动自由度数。矩阵 V 的右 P 列构成雅可比矩阵 A 的零空间正交基，记为：

$$H_{3n\times P}=[v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_{3n}] \tag{13}$$

式中：$v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_{3n}$—零空间基底向量，又称为可展结构的广义运动模态向量。根据线性代数理论，存在如下关系：

$$A_{s\times3n}H_{3n\times P}=0 \tag{14}$$

对照式（10）和式（14），可以推导出$\dot{X}$能够表示为矩阵 A 的零空间基底向量的线性组合：

$$\dot{X}_{3n\times1}=\dot{\alpha}_1v_{r+1}+\dot{\alpha}_2v_{r+2}+\cdots+\dot{\alpha}_Pv_{3n}=H_{3n\times P}\dot{\alpha}_{P\times1} \tag{15}$$

式中：$\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,\cdots,\dot{\alpha}_P$—组合系数；$\dot{\alpha}_{P\times1}$—组合系数组成的列向量。

可展结构系的广义运动自由度数 P 存在如下两种情况：当 P>0 时，体系具有 P 个广义运动自由度；当 P<0 时，结构体系的有效几何约束数超过 n，结构为稳定状态，不具有运动自由度。

将式（15）中的组合系数$\dot{\alpha}$看作一组独立准速率，其与广义速度$\dot{X}$的关系为：

$$\dot{X}=H\dot{\alpha} \tag{16}$$

式中：$\dot{\alpha}$—维列向量，P=3n−r。要求加速度时，求导得：

$$A\ddot{X}+\dot{A}\dot{X}=0 \tag{17}$$

式中：$\dot{A}$—雅可比矩阵 A 的一阶微分。式（17）的解为：

$$\ddot{X}=H\ddot{\alpha}-A^+\dot{A}\dot{X} \tag{18}$$

根据式（16），广义加速度可表示为：

$$\ddot{X}=H\ddot{\alpha}-A^+\dot{A}H\dot{\alpha} \tag{19}$$

对式（16）变分，得：

$$\Delta X=H\Delta\alpha \tag{20}$$

将式(19)、(20)代入动力学方程式(6)得到一组不含乘子且方程数目等于结构自由度数的动力学方程组为：

$$\begin{cases}\dot{X}=H\dot{\alpha}\\ H^TMH\ddot{\alpha}-H^TMA^+\dot{A}H\dot{\alpha}-H^TQ=0\end{cases} \tag{21}$$

初值条件为：

$$\begin{cases}X_{t=0}=X_0\\ \dot{X}_{t=0}=\dot{X}_0\end{cases}$$

3 结束语

一般在初始时刻知道位形（位置矢量）和节点速度，从而可根据式（16）确定初始时刻的独立准速率$\dot{\alpha}_t$=0。根据初值，选择适当的数值积分法（如选用四阶龙格库塔法）逐步积分迭代，就可求出结构运动过程的加速度、速度和位置矢量，分析结构运动过程的能量变化。

The Application of Generalized Inverse Matrix Theory in the Dynamic Analysis of Deployable Antenna Structure

WANG Feng

(Xidian University, Xi′an Shaanxi 710071, China)

Abstract: The theoretical basis employed to analyze the deployment process of deployable space structures was described;The generalized inverse matrix theory and application were introduced ,and dynamic equations of the deployable structures were presented.Using the null space orthogonal basis vectors of the constraint equations′ Jacobian matrices,a set of quasi-velocity was integrated into the dynamic equations, then a group of independent dynamic equations with no coefficients are formulated .

Key words: generalized inverse matrix; dynamic equations; deployable structure; null space orthojonal basis

如 何 学 习 天 线 设 计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训(www.edatop.com)专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…

HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址：http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html

CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览：http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html

13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览：http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html

关于易迪拓培训：

易迪拓培训(www.edatop.com)由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力和专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网(www.mweda.com)，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

我们的课程优势：

※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验

※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求

※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误

※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

联系我们：

※ 易迪拓培训官网：http://www.edatop.com

※ 微波 EDA 网：http://www.mweda.com

※ 官方淘宝店：http://shop36920890.taobao.com