

# 基于 PARAFAC 的多模天线阵列信号波达方向估计

马静艳,徐友根,刘志文

MA Jing-yan, XU You-gen, LIU Zhi-wen

北京理工大学 信息与电子学院,北京 100081

Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

E-mail: majy@bit.edu.cn

MA Jing-yan, XU You-gen, LIU Zhi-wen. DOA estimation of multimode antenna array signal based on PARAFAC model. *Computer Engineering and Applications*, 2010(9S):249-252.

**Abstract:** This paper constructs PARAFAC decomposition model based on biconical antenna array by exploiting relationship among multimode antenna array, and analyzes the identifiability of PARAFAC decomposition of multimode antenna arrays. If identifiability condition is satisfied, array manifold and pattern matrix can be got via TALS algorithm without knowing the exact information of array structure. And DOA can be estimated by utilizing pattern matrix.

**Key words:** multimode antenna array; PARAFAC; DOA estimation; TALS algorithm

**摘要:** 利用双锥天线多个模式输出间的旋转不变关系,建立了基于双锥多模天线阵列的并行因子(PARAFAC)分解模型,并对双锥多模天线阵列 PARAFAC 模型的辨识性进行了分析。在满足模型可辨识条件下,无须知道阵列的精确结构,即可利用三线性交替最小二乘迭代(Trilinear Alternating Least Squares, TALS)算法得到阵列的空间阵列流型和模式矩阵,估计出信号的波达方向(DOA)。

**关键词:** 多模天线阵列; PARAFAC 模型; DOA 估计; TALS 算法

**文献标识码:**A **中图分类号:**TN911.7

## 1 引言

并行因子(PARAFAC)分解是一种多线性代数工具,又称为张量的典范分解。近几年来,PARAFAC 分解模型在阵列信号处理中的应用逐渐引起人们的研 究兴趣。文献[1]首次提出了利用 PARAFAC 模型对具有多旋转不变关系的标量阵列的接收信号进行建模与分析。而具有多旋转不变性的阵列或数据结构满足多旋转不变性的场合一般都可以利用 PARAFAC 模型进行分析,文献[2-3]就将 PARAFAC 模型应用到了电磁矢量传感器阵列。其主要思想是将信号的极化特性作为时间维和空间维之外的第三维,建立电磁矢量传感器阵列的张量模型。

双锥多模天线通常作为一种常见的全方向性宽

带天线使用。在传统的天线研究中,都只考虑双锥天线激励的主模,但如果将同轴线波导的直径增大,能使其同时激励出 TE 模<sup>[4]</sup>。与 TEM 模不同,TE 模只有电场垂直于传播方向。由于单个多模天线的多个 TE 模的输出表达式之间存在与 DOA 有关的特殊内在联系,可利用单个双锥天线不同模式输出之间的关系来提取信号的一些信息,类似于一个天线阵列<sup>[5]</sup>。文献[14]提出利用双模天线阵列的模式域旋转不变(ES-PRIT)参数估计算法。而多模天线阵列不同模式的输出在一定条件下满足多旋转不变性,所以本文考虑利用双锥天线的多模特性,建立多模天线阵列的并行因子分解模型。当多模天线阵列的阵元数、快拍数和信号源个数满足可辨识性条件时<sup>[7-8]</sup>,张量的并行因子模

型的分解结果具有唯一性。因此,通过 TALS 算法<sup>[10-13]</sup>可在对阵列结构无先验知识的条件下得到信号的 DOA。

## 2 多模天线阵列的信号接收模型

图 1 所示为一个双锥形多模天线接收信号的示意图,每个双锥形天线可以输出  $P$  种不同电磁波模式下的感应电压,  $P$  的大小与连接天线的波导所满足的边界条件有关<sup>[4]</sup>。当来自  $(\theta, \phi)$  方向 ( $\theta$  为俯仰角,  $0 < \theta \leq 90^\circ$ ,  $\phi$  为方位角,  $0 < \phi \leq 180^\circ$ ) 的单个平面电磁波入射至参考阵元时, 无噪情况下该阵元第  $p$  个模式下的输出为<sup>[5]</sup>:

$$x_p(\theta, \phi, l, \alpha, t) = G_p(\theta, \phi, l, \alpha)E_s(t) = \cos(p\phi)G'_p(\theta, l, \alpha)E_s(t) \quad (1)$$

$G_p(\theta, \phi, l, \alpha) = \cos(p\phi)G'_p(\theta, l, \alpha)$  为  $p$  模式下的增益系数,  $G'_p(\theta, l, \alpha)$  只与天线参数  $l, \alpha$  以及俯仰角  $\theta$  有关, 具体形式十分复杂<sup>[9]</sup>, 不再赘述。考虑一维波达方向估计问题, 令所有信号的俯仰角  $\theta_m$  均为  $90^\circ$ , 此时有  $G_p(90^\circ, \phi, l, \alpha) = \cos(p\phi)G'(l, \alpha)$ , 则

$$x_1^{(p)}(t) = \cos(p\phi)s(t), p=1, 2, \dots, P \quad (2)$$

其中  $s(t) \triangleq G'(l, \alpha)E_s(t)$ , 与方位角  $\phi$  无关。

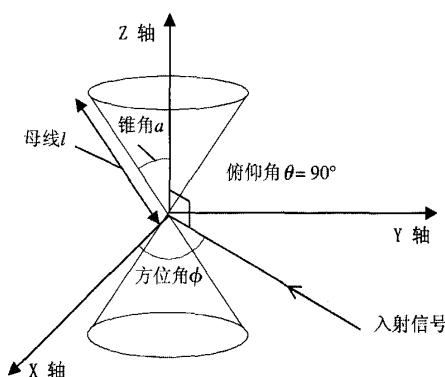


图 1 双锥天线接收信号示意图

当  $M$  个来自  $x-y$  平面的信号入射至由  $K$  个多模天线组成的均匀线阵, 快拍数为  $N$ , 无噪情况下多模天线阵列第  $n$  个时刻第  $k$  个天线第  $p$  个模式下的输出为:

$$x_{k,n,p} = \sum_{m=1}^M [\alpha_m]_k [\psi_m]_p [s_m]_n \quad (3)$$

其中  $[\cdot]_k$  表示矢量的第  $k$  个元素;  $[s_m]_n$  表示对第  $m$  个信号的第  $n$  次采样;  $\alpha_m = [e^{-j\omega_0\tau_{1,m}}, e^{-j\omega_0\tau_{2,m}}, \dots, e^{-j\omega_0\tau_{K,m}}]$ , 由于是线阵, 则第  $k$  个阵元相对参考阵元的时延  $\tau_{k,m} = (d_k/c)\sin(\theta_m)\cos(\phi_m) = (d_k/c)\cos(\phi_m)$ ;  $\psi_m = [\cos\phi_m, \dots, \cos P\phi_m]^T$ 。

由(3)式可知  $x_{k,n,p}$  是一个三重积的和, 也即 PARAFAC 分析模型的结构。定义一个  $K \times N \times P$  维三阶张量  $\underline{X}$ , 式(3)中  $x_{k,n,p}$  即为  $\underline{X}$  的索引为  $k, n, p$  的元素的值。

$$\underline{X} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \psi_m \circ s_m \quad (4)$$

在多模天线的 PARAFAC 模型当中,  $\underline{X}$  是将观测数据利用三维空间进行排列, 即空间维、时间维和模式维, 如图 2 所示。

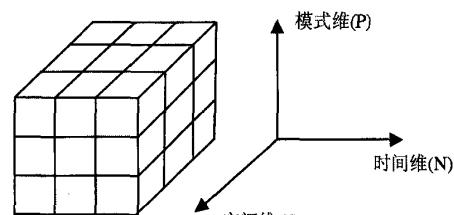


图 2 张量空间示意图

定义:

$$\underline{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M] \quad (5)$$

$$\underline{\Psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M] \quad (6)$$

$$\underline{S} = [s_1, s_2, \dots, s_M]^T \quad (7)$$

可得  $\underline{X}$  的沿模式维方向的 2 维切片矩阵:

$$\underline{X}_p = \underline{A} \underline{D}_p(\underline{\Psi}) \underline{S}, p=1, 2, \dots, P \quad (8)$$

其中  $\underline{D}_p(\underline{\Psi}) = \text{diag}([\psi_{p,1}, \psi_{p,2}, \dots, \psi_{p,M}])$  是将  $\underline{\Psi}$  的第  $p$  行元素作为对角元素的对角阵。同理可得沿空间维和时间维的切片矩阵

$$\underline{Y}_k = \underline{S}^T \underline{D}_k(\underline{A}) \underline{\Psi}^T, k=1, 2, \dots, K \quad (9)$$

$$\underline{Z}_n = \underline{\Psi} \underline{D}_n(\underline{S}^T) \underline{A}^T, n=1, 2, \dots, N \quad (10)$$

## 3 辨识性能分析

定义 1<sup>[7-8]</sup> 对于一个矩阵  $A \in \mathbb{C}^{K \times J}$ , 如果任意  $l \leq J$  个  $A$  的列向量满足线性独立, 且存在一组  $l+1$  个  $A$  的列向量线性相关, 则称  $A$  的 Kruskal 秩( $k$  秩)  $k_A = l$ 。

定理 1<sup>[7,9]</sup> 对于一个  $\underline{X}_p = \underline{A} \underline{D}_p(\underline{\Psi}) \underline{S}, p=1, 2, \dots, P$  形式的矩阵集合, 其中  $\underline{A} \in \mathbb{C}^{K \times M}$ ,  $\underline{\Psi} \in \mathbb{C}^{P \times M}$ ,  $\underline{S} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ , 若满足

$$k_A + k_{\Psi} + k_S \geq 2M+2 \quad (11)$$

则  $\underline{A}$ 、 $\underline{\Psi}$  和  $\underline{S}^T$  的排列与标度具有唯一性。即模型可辨识。 $M=1$  时, 不论式(11)是否成立都满足模型可辨识条件, 即  $\underline{X}$  沿任何一维的切片都不含有零矩阵。

由定义知  $A \in \mathbb{C}^{K \times M}$  的  $k$  秩与通常意义的秩关系为:  $k_A \leq \text{rank}(A) \leq \min(K, M)$ , 当  $A$  为列满秩矩阵时,

两个等号同时成立。

下面讨论信号源数、阵元数, 以及采样数与阵列辨识性能的关系( $M \geq 2$ )。假设各个信号不相关, 且是随机取样,  $\mathbf{A}$ 、 $\Psi$ 都为  $k$  满秩, 取样数大于信号源数( $N \geq M$ )时, 则有  $\min(K, M) + \min(P, M) \geq M+2$ 。

(1)  $P=1$  时, 条件为  $\min(K, M) \geq M+1$ , 由于  $\min(K, M) \leq M \leq M+1$ , 式(11)一定不成立, 则不满足模型的可辨识条件。可以发现传统的矩阵模型即为PARAFAC模型的一种二阶特殊情况( $P=1$ ), 分解不具唯一性;

(2)  $2 \leq P \leq M$  时, 可辨识条件变为  $\min(K, M) \geq M-P+2$ , 则  $M \leq K+P-2$  时, 式(11)一定成立。此时阵列可辨识的信号源数为  $K+P-2$  个;

(3)  $P \geq M$  时, 只要满足  $K \geq 2$ , 即可保证式(11)成立。也就是说模式输出数不小于信号个数时, 天线个数只要不小于 2 就可以满足可辨识条件了。

当阵元数大于信号个数时( $K \geq M$ ), 辨识条件为  $\min(P, M) + \min(M, N) \geq M+2$ 。

(1)  $2 \leq P \leq M$  时, 可辨识条件变为  $M \leq N+P-2$  时, 式(11)一定成立。可以看到此时可辨识信号个数为  $N+P-2$ ;

(2)  $P \geq M$  时, 只要满足  $N \geq 2$ , 即可保证式(11)成立。也就是说模式输出数不小于信号个数时, 理论上采样数不小于 2 就可以满足可辨识条件。

#### 4 三线性交替最小二乘(TALS)算法

引理 1<sup>[9]</sup> (Khatri-Rao 积):

$$\Psi \odot \mathbf{A} = [\Psi_1 \otimes \mathbf{a}_1, \Psi_2 \otimes \mathbf{a}_2, \dots, \Psi_M \otimes \mathbf{a}_M] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{D}_1(\Psi) \\ \mathbf{A} \mathbf{D}_2(\Psi) \\ \vdots \\ \mathbf{A} \mathbf{D}_P(\Psi) \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中  $\mathbf{A}$  为  $K \times M$ ,  $\Psi$  为  $P \times M$ ,  $\otimes$  表示 Kronecker 积,  $\odot$  表示 Khatri-Rao 积。

阵列实际的接收数据为  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}$  和  $\mathbf{N}$  是两个  $K \times N \times P$  张量。 $\mathbf{N}$  的索引为  $k, n, p$  的元素  $n_{k, n, p}$  表示  $k$  个天线  $p$  模式分量接收的  $n$  时刻采样时的加性白噪声, 则有

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_1 \\ \tilde{\mathbf{X}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}_P \end{bmatrix} = (\Psi \odot \mathbf{A}) \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (13)$$

其中  $\{\tilde{\mathbf{X}}_p | p=1, 2, \dots, P\}$ ,  $\{N_p | p=1, 2, \dots, P\}$  分别为  $\tilde{\mathbf{X}}$  和  $\mathbf{N}$  的沿模式维方向的 2 维切片矩阵, 根据最小方差准则, 由式(13)可得

$$\min_{\mathbf{A}, \Psi, \mathbf{S}} \| \tilde{\mathbf{X}} - (\Psi \odot \mathbf{A}) \mathbf{S} \|_F^2 \quad (14)$$

已知  $\hat{\mathbf{A}}$ 、 $\hat{\Psi}$  的粗略估计时, 可以得到  $\mathbf{S}$  的条件最小二乘修正值

$$\hat{\mathbf{S}}_{cls} = (\hat{\Psi} \odot \hat{\mathbf{A}})^\dagger \tilde{\mathbf{X}} \quad (15)$$

其中  $(\cdot)^\dagger$  表示伪逆运算, 由式(9)和(10)可得

$$\hat{\Psi}_{cls}^T = (\hat{\mathbf{A}} \odot \hat{\mathbf{S}}^T)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}} \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{cls}^T = (\mathbf{S}^T \odot \hat{\Psi})^\dagger \tilde{\mathbf{Z}} \quad (17)$$

其中  $\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{Y}_1^T, \tilde{Y}_2^T, \dots, \tilde{Y}_K^T]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}} = [\tilde{Z}_1^T, \tilde{Z}_2^T, \dots, \tilde{Z}_N^T]^T$ 。

TALS 可以通过给任意初值进行初始化, 只要模型满足 Kruskal 可辨识条件, 即可通过式(15)~(17)的迭代修正得到  $\hat{\mathbf{A}}$ 、 $\hat{\Psi}$  和  $\hat{\mathbf{S}}^T$ 。并利用  $\hat{\Psi}$  估计信号的 DOA。

综上, TALS 算法的步骤如下所示。

(1) 首先通过多旋转参数不变算法初始化,  $\hat{\Psi}$  和  $\hat{\mathbf{S}}^T$ (也可通过赋任意初值进行初始化);

(2) 利用式(16)得到  $\hat{\mathbf{S}}$  的一个最小二乘修正值  $\hat{\mathbf{S}}_{cls}$ ;

(3) 利用式(17)和  $\hat{\mathbf{S}}_{cls}$  得到  $\hat{\Psi}$  的修正值  $\hat{\Psi}_{cls}$ ;

(4) 利用式(18)、 $\hat{\mathbf{S}}_{cls}$  和  $\hat{\Psi}_{cls}$  得到  $\hat{\mathbf{A}}$  的修正值  $\hat{\mathbf{A}}_{cls}$ ;

(5) 计算代价函数  $J^{(k)} = \| \tilde{\mathbf{X}} - (\hat{\Psi}_{cls} \odot \hat{\mathbf{A}}_{cls}) \hat{\mathbf{S}}_{cls} \|_F^2$ ,

设  $v$  为停止迭代的阈值门限, 若  $|J^{(k)} - J^{(k-1)}| \leq v$ , 则停止迭代, 否则从第 2 步开始重新迭代。

(6) 利用得到的矩阵  $\hat{\Psi}$  估计得到信号的 DOA。

#### 5 仿真与分析

考虑一个由 4 个多模天线组成的均匀线阵(模式数  $P=3$ ), 阵元间距为信号半波长。设方位角分别为  $(20^\circ, 40^\circ, 70^\circ, 125^\circ, 160^\circ)$  的 5 个独立信号入射至阵列。信噪比为 20 dB, 快拍数为 100, 20 次独立仿真实验的结果如图 3 所示; 设 6 个独立信号入射到阵列, 方位角分别为  $(20^\circ, 40^\circ, 70^\circ, 125^\circ, 140^\circ, 160^\circ)$ 。其余

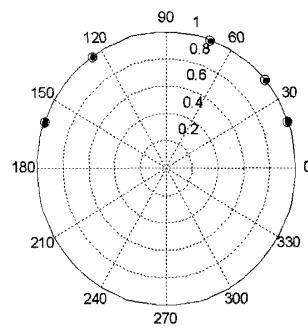


图 3 DOA 估计结果( $M=5$ )

条件同上,仿真结果如图 4 所示。

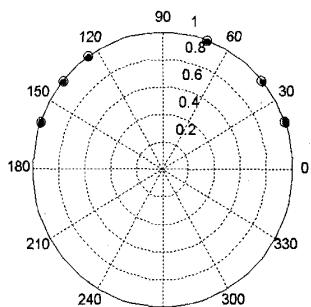


图 4 DOA 估计结果( $M=6$ )

由辨识性能分析的结论可知阵列可保证唯一辨识的信号个数为 5。由图 3 可以看到该算法可有效估计 5 个信号的 DOA;当信号个数  $M=6$  时,尽管不满足可辨识条件,图 4 所示的仿真结果显示该方法仍有效估计出了信号的 DOA。可见可辨识性条件是算法有效的充分非必要条件,即不满足该条件时,算法仍可能有效。

设有方位角分别为  $(30^\circ, 80^\circ)$  的两个独立信号入射至阵列。固定快拍数  $N=100$ ,令信噪比在 0~30 dB 范围内变化,100 次独立实验,估计均方根误差(RMSE)随信噪比变化趋势如图 7 示;固定信噪比  $SNR=10$  dB,令快拍数在 50~250 范围内变化,100 次独立实验,估计均方根误差(RMSE)随快拍数变化趋势如图 8 所示。

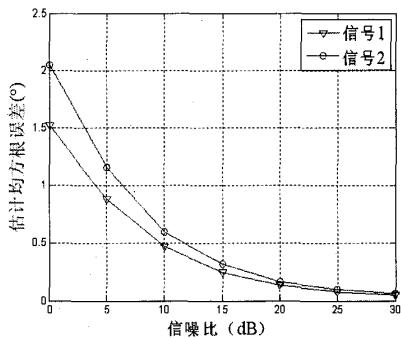


图 5 估计均方根误差随信噪比变化曲线

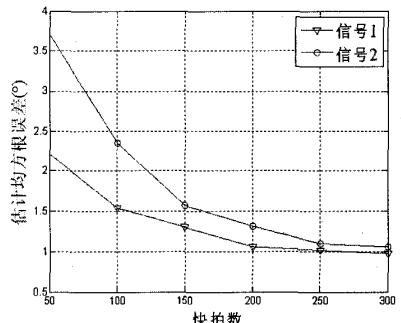


图 6 估计均方根误差随快拍数变化曲线

对其辨识性能进行了分析。当满足可辨识条件时,无需知道阵列结构的先验知识,即可利用 TALS 算法得到天线阵列的空间阵列流型和模式矩阵,估计出信号的 DOA。仿真结果验证了可辨识条件的结论和 TALS 算法的有效性。

## 参考文献:

- [1] Sidiropoulos N D, Bro R, Giannakis G B. Parallel factor analysis in sensor array processing[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2000, 48(8): 2377-2388.
- [2] Zhang X, Xu D. Blind PARAFAC signal detection for polarization sensitive array[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2007.
- [3] Guo X, Miron S, Brie D. Identifiability of the PARAFAC model for polarized source mixture on a vector sensor array[C]//Proc ICASSP 2008, 2008: 2401-2404.
- [4] Demmerle F. A biconical multibeam antenna for space-division multiple access[J]. IEEE Trans Antenna Processing, 1998, 46(6): 782-787.
- [5] Svantesson T. Multimode based direction finding[C]//Proc IEEE 34th Asilomar Conf on Signals, Systems and Computers, 29 Oct-1, Nov 2000, 1: 595-599.
- [6] Svantesson T. On the potential of multimode antenna diversity[C]//Proc IEEE VTC 2000 Fall, Boston, MA, Sep 2000: 2368-2372.
- [7] Kruskal J B. Three-way arrays: Rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics[J]. Linear Algebra Applcat, 1977, 18: 95-138.
- [8] Harshman R A. The PARAFAC model for three-way factor analysis and multidimensional scaling[C]//Research Methods for Multimode Data Analysis, 1984: 122-215.
- [9] Sidiropoulos N D, Giannakis G B, Bro R. Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2000, 48(3): 810-823.
- [10] Harshman R A. Foundation of the PARAFAC procedure: Model and conditions for an “explanatory” multi-mode factor analysis [J]. UCLA Working Papers in Phonetics, 1970, 16: 1-84.
- [11] Harshman R A. Determination and proof of minimum uniqueness conditions for PARAFAC1 [J]. UCLA Working Papers in Phonetics, 1972, 22: 111-117.
- [12] Harshman R A. PARAFAC2: Mathematical and technical notes[J]. UCLA Working Papers in Phonetics, 1972, 22: 33-34.
- [13] Carroll J D, Chang J. Analysis of individual difference in multidimensional scaling via an  $N$ -way generalization of “Eckart-Young” decomposition[J]. Psychometrika, 1970, 35 (3): 283-319.
- [14] 付思超, 徐友根, 刘志文. 基于双模天线阵列的 ESPRIT 的波达方向估计[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2299-2302.

## 6 总结

建立了多模天线阵列的 PARAFAC 分解模型,并

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立,一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养;后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com)),现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地,成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程,广受客户好评;并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书,帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司,以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年, 10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养, 更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果, 又能免除您舟车劳顿的辛苦, 学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲, 结合实际工程案例, 直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>