

# 阵列天线输出自相关矩阵及其误差分析

王 玲 李校林

重庆邮电学院 重庆 400065

**摘要:** 本文通过引入相对误差矩阵范数的定义, 讨论了实际阵列天线输出样本的自相关矩阵与连续采样情形下自相关矩阵的差别, 及其与采样快拍数、信号的相关性、信号与噪声之间的正交性以及噪声的正交性等因素的关系。并通过数值计算, 具体分析了不同情形下, 样本自相关矩阵收敛于理想自相关矩阵的速度变化。

**关键词:** 阵列天线 自相关矩阵 相对逼近因子 相对误差矩阵范数

## 1 问题的提出

在移动通信系统中, 阵列天线是一种降低系统干扰, 提高系统容量和频谱效率的新技术, 并在码分多址(CDMA)系统中得到了有效的应用。阵列天线输出的自相关矩阵, 是基于特征结构分解的一类自适应处理算法的基础。在理想的极限情形下对阵列输出进行连续采样和处理后, 可以认为能获得阵列输出的真实自相关矩阵。然而, 在实际处理中, 通常是对阵列输出进行离散采样, 通过处理得到阵列输出样本的自相关矩阵, 并进而用样本自相关矩阵来逼近真实自相关矩阵。显然, 采样快拍数的选取会影响样本自相关矩阵来逼近真实自相关矩阵的程度。事实上, 样本自相关矩阵与真实自相关矩阵之间的差别还会受到多种因素的影响。其中可以肯定, 信号相关性、信号与噪声之间的正交性以及噪声的正交性等因素将会扮演重要的角色。本文从实际阵列输出的自相关矩阵与真实阵列输出的自相关矩阵差别人手, 通过数值计算, 考察了采样快拍数、信号相关性、信号与噪声之间的正交性以及噪声的正交性等因素的关系对阵列输出样本自相关矩阵收敛于真实自相关矩阵的具体影响。

## 2 阵列输出自相关矩阵真实结果和实际结果的比较

不失一般性, 考察具有非各向同性阵元的  $p$  元直线阵列。设有从不同方向  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$  入射的  $k$  个( $k$  小于阵元数目  $p$ )载频为  $\omega_0$  的窄带平面波  $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_k(t)\}$ , 这时, 可以将第  $i$  个人射信号在第  $l$  个阵元上产生的相对相位差表示为  $\phi_l(\theta_i)$ 。再设第  $l$  个阵元对第  $i$  个信号的接收方向图为  $f_l(\theta_i)$ , 则第  $l$  个阵元上的输出可以表示为:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^k [f_l(\theta_i) e^{j\phi_l(\theta_i)}] s_i(t) + n_l(t) \quad (1)$$

假设输入噪声  $n_l(t)$  为零均值平稳高斯白噪声, 其方差为  $\sigma_n^2$ 。不失一般性, 入射信号  $s_i(t)$  可以假定为具有零均值的平稳复随机过程。

利用上述表述方法和相互关系, 可以分别导出, 真实阵列输出自相关矩阵  $R$  的解析表示,

采样快拍数位  $N$  时样本自相关矩阵  $\hat{\mathbf{R}}(N)$  的解析表示式，并进一步分析两者的差值。

连续采样时，利用阵列的输出，可以构成真实阵列输出信号的自相关矩阵  $\mathbf{R}$ ，即

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \quad (2)$$

采用类似于文献[1]中的处理，真实阵列输出自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的第  $(m, n)$  个元素  $\langle R_{m,n} \rangle$  可表示为：

$$\langle R_{m,n} \rangle = \begin{cases} \sum_{i=1}^k |f_m(\theta_i)|^2 p_i + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k f_m(\theta_i) f_m^*(\theta_j) \rho_{ij} \sqrt{p_i p_j} + \sigma_n^2 & , m = n \\ \sum_{i=1}^k f_m(\theta_i) f_n^*(\theta_j) p_i + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k f_m(\theta_i) f_n^*(\theta_j) \rho_{ij} \sqrt{p_i p_j} & , m \neq n \end{cases} \quad (3)$$

这里，已定义：

$$\rho_{ij} = \frac{E[s_i(t)s_j^*(t)]}{\sqrt{E[s_i(t)s_i^*(t)]E[s_j(t)s_j^*(t)]}}, \quad p_i = E[|s_i(t)|^2] \quad (4)$$

$\rho_{ij}$ ， $p_i$  分别表示连续采样时，信号  $s_i(t)$  和  $s_j(t)$  间的互相关系数及信号  $s_i(t)$  的功率。

同样，与文献[1]中的方法类似，利用阵列的输出在  $N$  个时刻的快拍输出数据，可构成对真实阵列输出自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的一个样本估计矩阵：

$$\hat{\mathbf{R}}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{x}(t_i) \bar{x}^H(t_i) \quad (5)$$

设  $x_m(t_i)$  表示第  $m$  个阵元在  $t_i$  时刻的输出，则样本自相关矩阵的第  $(m, n)$  个元素  $\langle \hat{R}_{m,n} \rangle$  可表示为：

$$\langle \hat{R}_{m,n} \rangle = \begin{cases} \sum_{i=1}^k |f_m(\theta_i)|^2 \hat{p}_i + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k f_m(\theta_i) f_m^*(\theta_j) \hat{\rho}_{ij} \sqrt{\hat{p}_i \hat{p}_j} + \hat{\sigma}^2 & , m = n \\ + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_m^*(t_l) [\sum_{i=1}^k f_m(\theta_i) s_i(t_l)] + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_m(t_l) [\sum_{j=1}^k f_m^*(\theta_j) s_j^*(t_l)] & \\ \sum_{i=1}^k f_m(\theta_i) f_n^*(\theta_j) \hat{p}_i + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k f_m(\theta_i) f_n^*(\theta_j) \hat{\rho}_{ij} \sqrt{\hat{p}_i \hat{p}_j} & , m \neq n \\ + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_m(t_l) [\sum_{j=1}^k f_n^*(\theta_j) s_j^*(t_l)] + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_n^*(t_l) [\sum_{i=1}^k f_m(\theta_i) s_i(t_l)] + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_m(t_l) n_n^*(t_l) & \end{cases} \quad (6)$$

这里，已定义：

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (s_i(t_l) s_j^*(t_l))}{\sqrt{\hat{p}_i \hat{p}_j}}, \quad \hat{p}_i = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |s_i(t_l)|^2 \quad (7)$$

$\hat{\rho}_{ij}$ ， $\hat{p}_i$  分别对应于连续采样时的  $\rho_{ij}$ ， $p_i$ 。

为了考察样本自相关矩阵  $\hat{\mathbf{R}}(N)$  和真实自相关矩阵  $\mathbf{R}$  之间的区别，定义对应元素  $\langle \hat{R}_{m,n} \rangle$  和  $\langle R_{m,n} \rangle$  的差值为  $\varepsilon_{m,n}(N)$ ，则有：

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{m,n}(N) = \langle \hat{\mathbf{R}}_{m,n} \rangle - \langle \mathbf{R}_{m,n} \rangle \\
&= \begin{cases} \sum_{i=1}^k |f_m(\theta_i)|^2 (\hat{p}_i - p_i) + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k f_m(\theta_i) f_m^*(\theta_j) (\hat{\rho}_{ij} \sqrt{\hat{p}_i \hat{p}_j} - \rho_{ij} \sqrt{p_i p_j}) \\ + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_m(t_l) [\sum_{j=1}^k f_m^*(\theta_j) s_j^*(t_l)] + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_m^*(t_l) [\sum_{i=1}^k f_m(\theta_i) s_i(t_l)] + \hat{\sigma}^2 - \sigma^2, & m = n \\ \sum_{i=1}^k f_m(\theta_i) f_n^*(\theta_i) (\hat{p}_i - p_i) + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k f_m(\theta_i) f_n^*(\theta_j) (\hat{\rho}_{ij} \sqrt{\hat{p}_i \hat{p}_j} - \rho_{ij} \sqrt{p_i p_j}) \\ + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_m(t_l) [\sum_{j=1}^k f_n^*(\theta_j) s_j^*(t_l)] + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_n^*(t_l) [\sum_{i=1}^k f_m(\theta_i) s_i(t_l)] \\ + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N n_m(t_l) n_n^*(t_l), & m \neq n \end{cases} \quad (8)
\end{aligned}$$

从(8)式中可以看出，采样快拍数、信号的相关性、信号与噪声之间的正交性以及噪声的正交性等因素，直接影响着实际样本自相关矩阵与真实自相关矩阵之间的差别。

上述实际样本自相关矩阵和真实自相关矩阵之间的差别，一方面，可以通过引入相对逼近因子<sup>[2][3]</sup>，来衡量不同条件下样本自相关矩阵随快拍数增加而趋近真实自相关矩阵的快慢程度；另一方面，可以通过引入相对误差矩阵范数进行衡量。

定义相对误差矩阵范数  $\bar{\varepsilon}_N$  为，样本自相关矩阵和真实自相关矩阵之间的差值矩阵的  $F$  范数与真实自相关矩阵的  $F$  范数的比值。用数学语言来描述，若样本自相关矩阵为  $\hat{\mathbf{R}}(N)$ ，与之对应的真实自相关矩阵为  $\mathbf{R}$ ，则有

$$\bar{\varepsilon}_N = \frac{\|\hat{\mathbf{R}}(N) - \mathbf{R}\|_F}{\|\mathbf{R}\|_F} \quad (9)$$

下面可以采用数值计算的方法得到一些定量的结论。

不妨以全向阵元构成的三元均匀直线阵模型为例，利用数值分析来考察各种因素不同影响下，样本自相关矩阵随快拍数增加收敛速度的相对变化。这时，阵列输出数据矢量的各分量间具有线性的相位关系，即：

$$\bar{F}(\theta) = (1, \exp\left(\frac{j2\pi d \sin \theta}{\lambda}\right), \exp\left(\frac{j4\pi d \sin \theta}{\lambda}\right))^T$$

其中，阵元间距  $d$  为  $0.5\lambda$ ， $\lambda$  为工作波长。

设有两个等幅来波以角度( $10^\circ, 30^\circ$ )入射，输入噪声服从均值为 0，方差为 1 的复高斯分布。为了得到统计平均的结果，在快拍数为 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 及 100 时，分别进行了 100 次独立计算。以下给出有关的数值计算结果。

### (1) 信号相关系数对样本自相关矩阵收敛速度的影响

在输入 SNR 为任何 dB 情况下，信号相关系数  $\rho$  分别为 0, 0.2, 0.8 条件下，分别取样本自相关矩阵中信号相关系数服从均值为 0, 0.2, 0.8 且取值范围为  $8+8i$  的均匀分布，则相对误差矩阵范数  $\bar{\varepsilon}_N$  随快拍数变化的结果如图 1 中所示。在计算中，已忽略了信号与噪声之间的正交性和噪声之间正交性的影响。为此，我们取(8)式中各项与噪声有关的求和项均为零。这等

效于信号与噪声、噪声与噪声之间完全正交，且快拍数趋近于无限大时的结果。因此，在(8)式中信号相关性不同时，图 1 中的有关结果说明了为达到理想阵列输出处理结果所需要的采样快拍数。

#### (2) 信号与噪声之间的正交性对样本自相关矩阵收敛速度的影响

在输入 SNR 为 0dB 条件下，取定样本自相关矩阵元素中信号与噪声乘积服从均值为 0 且取值范围分别为  $1+i$ ,  $4+4i$ ,  $8+8i$  的均匀分布，则相对误差矩阵范数  $\bar{\epsilon}_N$  随快拍数变化的结果如图 2 所示。在图 2 的计算中，已选择两个信号互不相关，且噪声之间完全正交，二者均达到了快拍数趋于无限大时的结果。因此，图 2 反映了(8)式中信号与噪声间正交性不同时，实际阵列输出处理结果趋近于理想阵列输出处理结果所需要的快拍数。

(3) 信号正交性对样本自相关矩阵收敛速度的影响在输入 SNR 为 0dB 条件下，我们取定样本自相关矩阵元素中信号交叉项乘积服从均值为 0 且取值范围分别为  $1+i$ ,  $4+4i$ ,  $8+8i$  的均匀分布时，则相对误差矩阵范数  $\bar{\epsilon}_N$  随快拍数变化的结果如图 3 所示。在有关计算中，已选择信号间互不相关，且信号与噪声间完全正交，二者均达到了快拍数趋于无限大时的结果。因此，图中结果反映了(8)式中噪声间正交性不同时，实际阵列输出处理结果趋近于理想阵列输出处理结果所需要的快拍数。

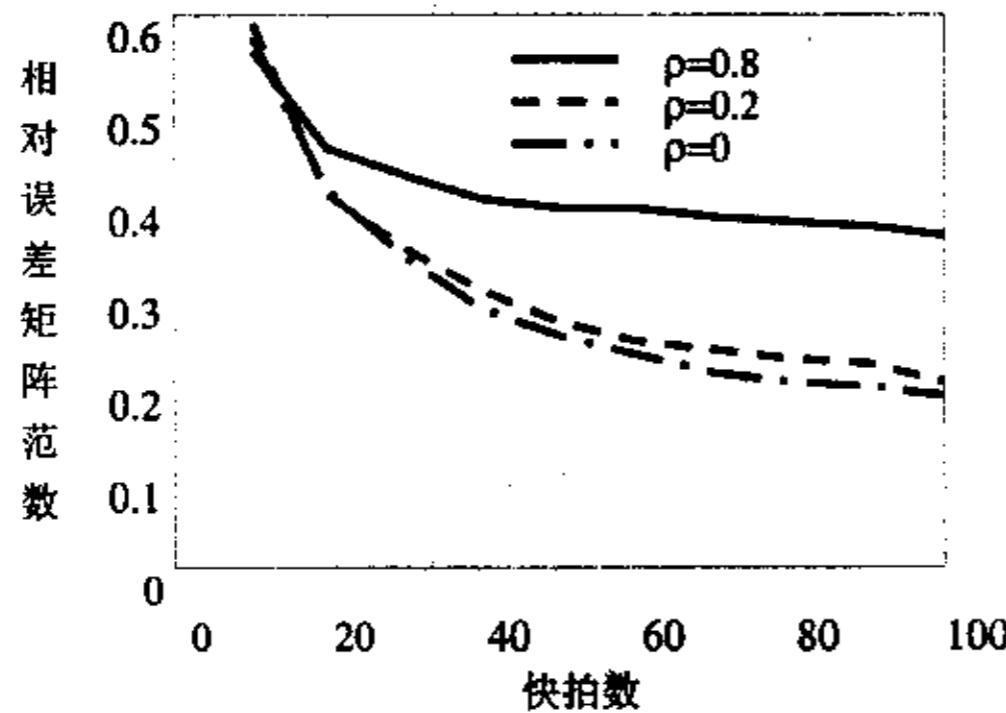


图 1 信号相关性对矩阵收敛的影响

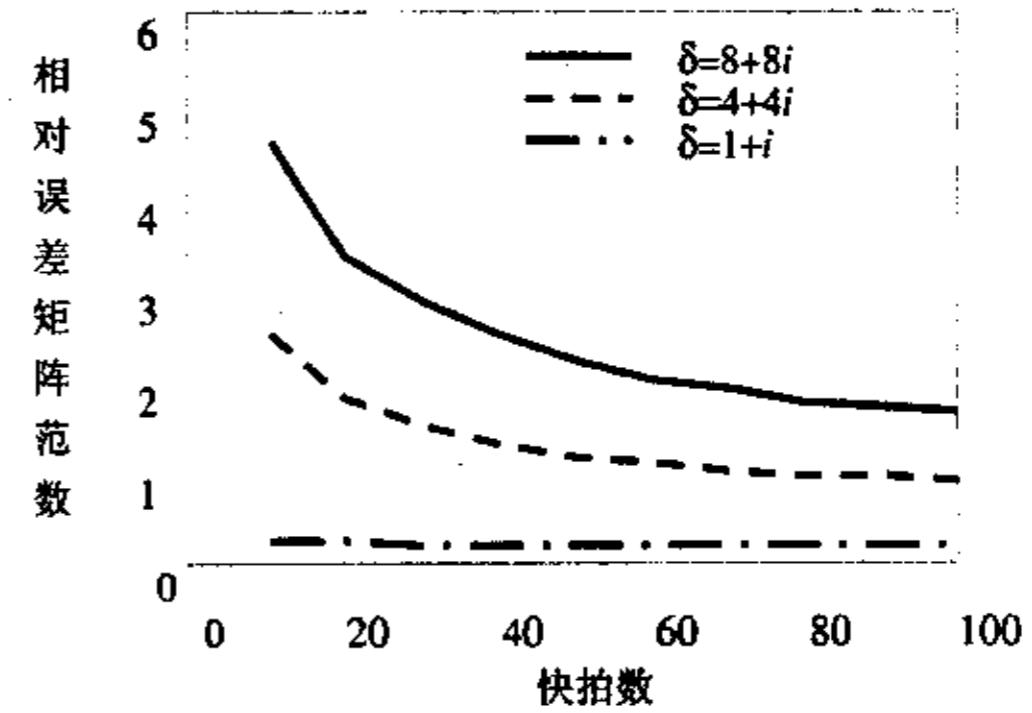


图 2 信号与噪声正交性对矩阵收敛的影响

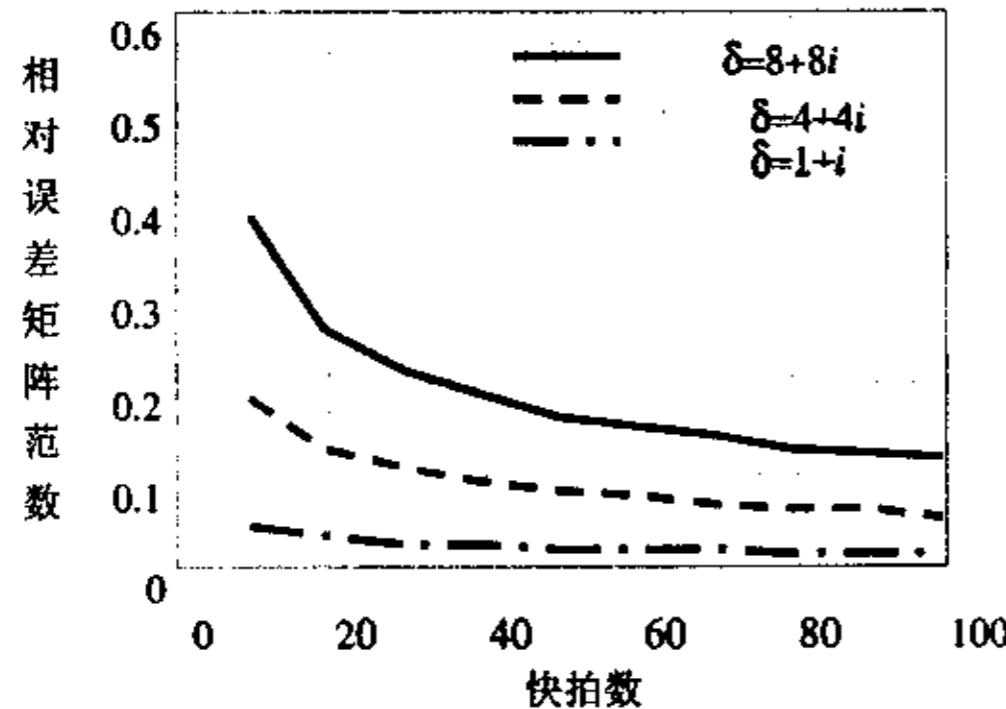


图 3 噪声正交性对矩阵收敛的影响

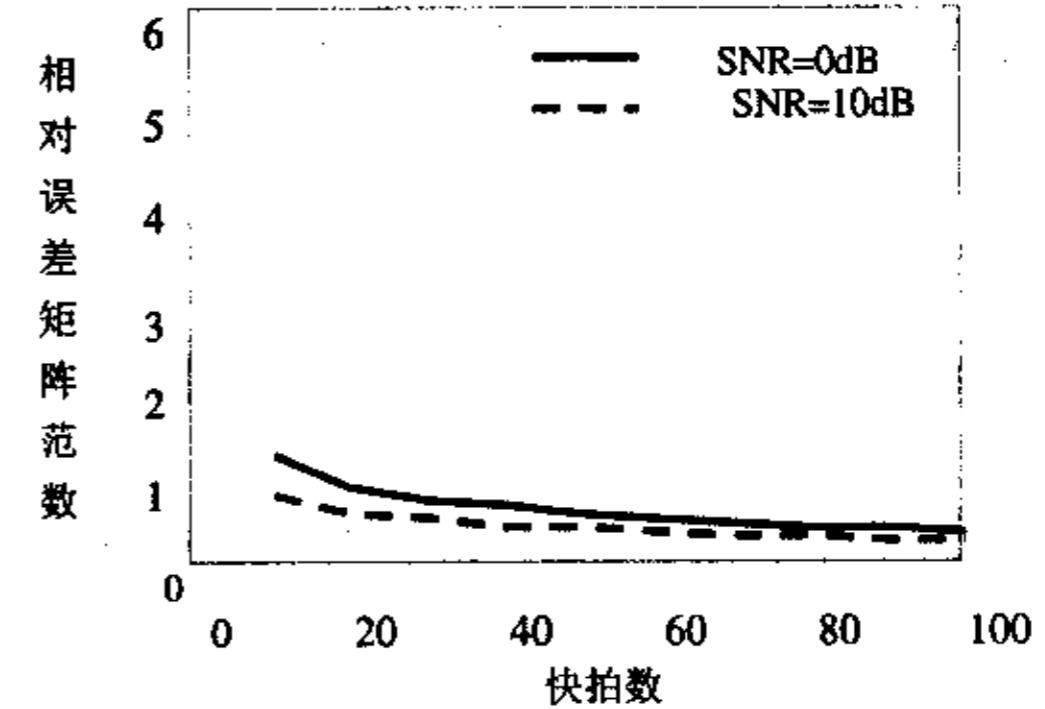


图 4 信噪比对矩阵收敛的影响

(4) 信号信噪比对样本自相关矩阵收敛速度的影响在输入 SNR 为 0dB 条件下，我们取定样本自相关矩阵元素中信号交叉项乘积、噪声交叉项乘积以及噪声与信号乘积服从均值为 0 且取值范围为  $8+8i$  的均匀分布；在输入 SNR 为 10dB 条件下，我们取定样本自相关矩阵元素中

噪声交叉项乘积服从均值为 0 且取值范围为  $8+8i$  的均匀分布, 信号交叉项乘积服从均值为 0 且取值范围为  $80+80i$  的均匀分布, 噪声与信号乘积服从均值为 0 且取值范围为  $25.3+25.3i$  的均匀分布, 则相对误差矩阵范数  $\bar{\epsilon}_N$  随快拍数变化的结果如图 4 所示。因此, 图 4 反映了不同 SNR 情况下, (8)式中信号与信号间正交性、噪声与噪声间正交性、信号与噪声间正交性相同时, 实际阵列输出处理结果趋近于理想阵列输出处理结果所需要的快拍数。

比较上述结果可以看出: 首先, 在上述不同情形下均表现出样本自相关矩阵随快拍数的增加而逐渐收敛于真实自相关矩阵的趋势; 其次, 不同的影响因素对这一收敛趋势的影响程度不同。例如, 当信号间相关性较弱时, 相对误差矩阵范数收敛速度随之而改善。又如, 当噪声正交性和信号与噪声正交性较好时, 相对误差矩阵范数收敛速度也会随之而改善; 此外, 作为综合考虑噪声正交性、信号和噪声之间的正交性及信号间相关性三种因素后的结果, 随着 SNR 增加相对误差矩阵范数随快拍数的增加而收敛的速度加快。

特别地, 当 SNR 取值较小(0dB)时, 若噪声正交性、信号和噪声之间的正交性、信号和信号之间正交性较差(取值范围取  $8+8i$ ), 则由上述图中结果对比可以看出, 信号和噪声之间的正交性对相对误差矩阵范数收敛的速度影响更大, 而噪声之间的正交性以及信号之间的正交性影响相对较次。换言之, 信号与噪声间正交性对样本自相关矩阵收敛于真实自相关矩阵的速度影响更大。另一方面, 当 SNR 较大(10dB)时, 若噪声正交性、信号和噪声之间的正交性、信号和信号之间正交性较差, 则类似地可以看出, 信号之间的正交性对相对误差矩阵范数的速度影响更大, 而噪声之间的正交性以及信号和噪声之间的正交性影响较次。显然, 这也是可以预期的结果。

### 3 结论

本文通过引入相对误差矩阵范数的方法, 描述了连续采样的阵列天线输出自相关矩阵, 与对应的离散化处理后的样本自相关矩阵的区别。并结合对特定问题的数值计算说明了信号相关性、信号与噪声之间的正交性、噪声的正交性等对样本自相关矩阵收敛速度的不同影响。事实上, 在进行实际阵列输出处理的设计中, 有必要针对具体问题而基于类似分析来进行必要论证, 从而实现对各种影响因素定量评价, 并恰当地选择参数及算法, 利用较少的快拍数而得到更接近真实情况的分析结果。从这一应用来看, 本文的工作具有重要的应用前景。

### 参 考 文 献

- [1] 杜惠平, 武刚, 赵为粮. 一种新型自适应天线的阵列输出特性分析[J]. 电子与信息学报 23(8):778-784, Aug. 2001
- [2] 沈福民. 自适应信号处理[M]. 西安电子科技大学出版社, 2001
- [3] 武钢. 基于菲涅尔区相位修正聚焦结构(FZP)的自适应多波束天线的研究[D]. 重庆邮电学院硕士学位论文, 重庆, 1999

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…

---



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

---

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>

---



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com))，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>