

# 非线性失真环境下的天线功率分配算法\*

彭晶波, 金慈航, 卫国

(中国科学技术大学 个人通信与扩频实验室, 安徽 合肥 230027)

**摘要:** 本文研究MIMO系统中, 考虑功放的非线性限幅作用后, 如何在天线之间分配功率的问题。在这种情况下, 采用传统的贪婪算法, 信道增益小的天线上分配的功率可能很大, 超过功放的线性范围, 产生严重的非线性失真。不仅无法提高系统吞吐量, 反而会导致吞吐量的恶化。通过对非线性失真环境下的系统吞吐量的分析, 提出了一种改进的贪婪算法, 综合考虑了无线信道引起的衰落和功放限幅引起的失真等因素, 能够更加合理的分配天线功率。仿真结果也表明, 新算法在信号功率较大的时候比传统的算法拥有更高的吞吐量。

**关键词:** 功率分配; 贪婪算法; 非线性失真; MIMO

**中图分类号:** TN911.4 **文献标识码:** A

## 1 引言

对于散射丰富的环境, MIMO系统引入了空间分集和复用技术, 能够有效地提高系统容量<sup>[1]</sup>。在总功率受限时, 合理分配各天线上的功率能够优化MIMO系统的容量<sup>[2]</sup>。因此, MIMO系统的天线功率分配是提高系统容量的重要手段。

整数比特约束的功率分配问题, 其目标是在保证一定误比特率的前提下, 用给定的总发射功率传输尽可能多的信息。这个问题的最优解为贪婪算法<sup>[3]</sup>: 每次分配一个比特, 分配原则是选择需要最小额外发射功率的天线, 直到各天线的总功率达到限制。

传统的贪婪算法, 仅仅根据天线的信道增益来调整在该天线上分配的功率。天线的信道增益越大, 在该天线上分配的功率越多。当各天线的信道增益差别较大时, 就可能出现某根天线上分配到过高功率的情况。如果将这种功率分配方法应用到实际系统中, 在这种情况下, 就会使功放进入非线性区域, 带来严重的带内干扰和带外辐射, 恶化系统性能。因此, 在实际系统中, 功放的限幅作用是研究功率分配问题所必须考虑的重要因素。

本文通过对非线性失真环境下的系统容量的研究, 分析了在给定噪声功率下系统容量随信号输入功率的变化关系, 综合考虑了天线的信道增益以及非线性失真大小, 提出了一种改进的贪婪算法。它能够抑制信号进入功放的非线性区域, 优化系统吞吐量, 避免产生限幅失真。

本文结构安排如下: 第2部分介绍了非线性失真环境下的MIMO模型; 第3部分提出了针对非线性失真环境的改进的贪婪算法; 第4部分给出了数值仿真结果, 并分析了其性能; 第5部分对全篇作了总结。

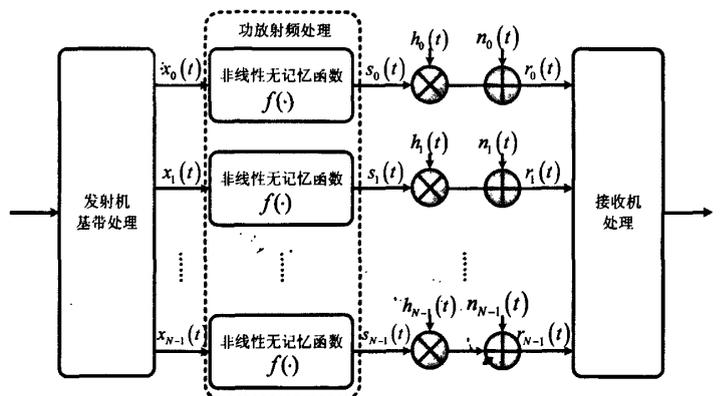


图1 非线性失真环境下的MIMO系统简化模型

\* 收稿日期: 2008-01-07 修订日期: 2008-04-03  
基金项目: 国家自然科学基金重大项目 (60390540)

## 2 非线性失真环境下的 MIMO 模型

### 2.1 MIMO 系统简化模型

当MIMO信道满秩时,对信道矩阵进行奇异值分解(SVD, Singular Value Decomposition),可以将MIMO信道分解为并行传输的子信道<sup>[4]</sup>。此时,非线性失真环境下的MIMO系统模型可简化为如图1所示。

其中  $N$  为发送天线个数,  $\mathbf{x}_N = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)]^T$  为发射机基带部分的输出矢量符号,  $x_n$  的实部和虚部相互独立且均服从均值为0, 方差为  $\sigma_x^2/2$  的高斯分布<sup>[5]</sup>。其幅度  $\rho_n = |x_n|$  服从Rayleigh分布, 概率密度函数如下

$$f(\rho) = \frac{2\rho}{\sigma_x^2} e^{-\rho^2/\sigma_x^2} \quad (1)$$

其中  $\sigma_x^2$  为  $x_n$  的方差。

本文将功放的非线性作用效果用函数  $f(\cdot)$  来表示, 功放的输出记为  $\mathbf{s}_N = [s_0(t), s_1(t), \dots, s_{N-1}(t)]^T$ , 有  $\mathbf{s}_N = f(\mathbf{x}_N)$ 。那么在接收端收到的信号可以用下式来表达

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{h}_N \mathbf{s}_N + \mathbf{n}_N = \mathbf{h}_N f(\mathbf{x}_N) + \mathbf{n}_N \quad (2)$$

其中  $\mathbf{r}_N = [r_0(t), r_1(t), \dots, r_{N-1}(t)]^T$  为接收信号,  $\mathbf{h}_N = \begin{bmatrix} h_0(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{N-1}(t) \end{bmatrix}$  和  $\mathbf{n}_N = [n_0(t), n_1(t), \dots, n_{N-1}(t)]^T$  分别

$N$  个等效并行子信道的信道乘性增益矩阵和加性噪声矩阵。

### 2.2 非线性失真的建模

不同类型的功放具有不同的作用函数  $f(\cdot)$ 。用  $x_\rho(t)$  和  $x_\phi(t)$  分别表示  $x(t)$  的幅度和相位, 而  $f_\rho(\cdot)$  和  $f_\phi(\cdot)$  分别表示  $f(\cdot)$  对  $x(t)$  的幅度作用函数和相位作用函数。为了简洁, 以下表述将省略变量  $t$ 。

典型的固态功放(SSPA, Solid-State Power Amplifier)建模如下<sup>[6]</sup>:

$$f_\rho(x) = \frac{x_\rho}{\left[1 + \left(\frac{x_\rho}{A_0}\right)^{2p}\right]^{1/2p}}, \quad f_\phi(x) = x_\phi \quad (3)$$

其中  $A_0$  为最大输出幅度,  $p$  控制了功放从线性区域到受限区域过渡的平滑程度。其幅度作用函数如图2所示。

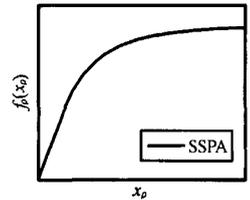


图2 SSPA的幅度作用函数

## 3 非线性失真环境下的天线功率分配方法

### 3.1 传统的贪婪算法

不考虑功放限幅引起的非线性失真, 即  $\mathbf{s}_N = \mathbf{x}_N$ 。单根天线的容量可以写为

$$R = B \log_2 \left( 1 + \frac{\sigma_s^2 g}{\sigma_n^2 \Gamma} \right) = B \log_2 \left( 1 + \frac{\sigma_x^2 g}{\sigma_n^2 \Gamma} \right) \quad (4)$$

其中  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_s^2$ ,  $g$  和  $\sigma_n^2$  分别为该天线上的基带信号功率, 射频输出功率, 信道功率增益以及噪声功率, 有  $g = |h|^2$ 。  $\Gamma$  为一定误比特率下的信噪比差(SNR gap), 在无编码QAM调制下, 其表达式可由误码率上限公式导出<sup>[7]</sup>:

$$\Gamma = -\ln(5BER_{\text{target}})/1.5 \quad (5)$$

用  $\mathbf{b}_N = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]^T$  表示  $N$  根天线上分配的比特数,  $\mathbf{P}_N = [P_0, P_1, \dots, P_{N-1}]^T$  表示  $N$  根天线上分配的功率大小。那么, MIMO系统的天线功率分配问题可以建模为在约束  $\sum_{n=0}^{N-1} P_n < P_{\text{total}}$ ,  $BER < BER_{\text{target}}$  下最大化  $b_{\text{total}} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n$ 。传统的贪婪算法步骤为<sup>[3]</sup>:

1) 初始化, 令  $b_n = 0, P_n = 0, n = 0, 1, \dots, N-1$ ;

2) 对每根发射天线, 根据式(4), 计算其上承载的信息量由  $b_n$  比特变为  $b_n + 1$  比特时所需要增加的功率  $\Delta P_n$ ;

3) 若  $\sum_{n=0}^{N-1} P_n + \min_{0 \leq n \leq N-1} \Delta P_n > P_{total}$ , 则分配终止, 此时得到的  $b_{total} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n$  即为当前的最大吞吐量。否则选择具有最小  $\Delta P_n$  的天线  $\hat{n} = \arg \min_{0 \leq n \leq N-1} \Delta P_n$  为承载该比特的天线, 置  $b_{\hat{n}} = b_{\hat{n}} + 1, P_{\hat{n}} = P_{\hat{n}} + \Delta P_{\hat{n}}$ , 返回2) 继续分配下个比特。

4) 传统贪婪算法的迭代以容量公式(4)为基础, 其  $\Delta P_n$  的表达式可以化简为

$$\Delta P_n = \frac{\sigma_n^2 \Gamma}{g_n} (2^{b_n+1} - 1) - \frac{\sigma_n^2 \Gamma}{g_n} (2^{b_n} - 1) = \frac{\sigma_n^2 \Gamma}{g_n} 2^{b_n} \quad (6)$$

可以看到, 判决依据  $\Delta P_n$  只和  $\sigma_n^2$ ,  $b_n$  以及  $g_n$  有关。当某根天线上的信道增益  $g_n$  很大时,  $\Delta P_n$  就会很小, 此时传统算法就会持续向该天线上分配功率, 导致该天线上的功率很大。

但是在实际情况中, 由于功放的限制, 单根天线的最大功率受限, 超出这个最大功率会带来严重的带外辐射和带内干扰, 不仅无法提高吞吐量, 反而会导致吞吐量的恶化。下面通过对非线性失真的分析, 修正容量公式(4), 进而获得改进的贪婪算法。

### 3.2 非线性失真环境下的容量公式

根据Busgang的理论, 对于任何高斯输入信号, 无记忆非线性畸变系统的作用函数可以按照下式分解<sup>[8]</sup>:

$$f(x(t)) = \alpha x(t) + d(t) \quad (7)$$

其中  $d(t)$  表示由  $f(\cdot)$  产生的畸变;  $\alpha$  为常数, 需要合理选择  $\alpha$  使得  $x(t)$  与  $d(t)$  独立, 即

$$E[x^*(t)d(t)] = 0 \quad (8)$$

考虑到畸变  $d(t)$  对系统吞吐量的影响, 单天线容量公式(4)可以改写为

$$R = B \log_2 \left( 1 + \frac{1}{\Gamma} \frac{\sigma_x^2 g}{\sigma_d^2 g + \sigma_n^2} \right) = B \log_2 \left( 1 + \frac{1}{\Gamma} \frac{|\alpha|^2 \sigma_x^2}{\sigma_d^2 + \sigma_n^2 / g} \right) \quad (9)$$

为计算新的容量公式(9)的具体表达式, 首先定义相对于功放门限  $A_0$  的归一化信号功率  $\bar{\sigma}_x^2$  和归一化噪声功率  $\bar{\sigma}_n^2$

$$\bar{\sigma}_x^2 = \sigma_x^2 / A_0^2, \quad \bar{\sigma}_n^2 = \sigma_n^2 / A_0^2 \quad (10)$$

为简单起见, 假设功放模型中的参数  $p=2$ 。可以证明, 非线性失真环境下的SSPA单天线容量公式为

$$R = B \log_2 \left( 1 + \frac{1}{\Gamma} \frac{A(l/\bar{\sigma}_x^2)}{B(l/\bar{\sigma}_x^2) + \bar{\sigma}_n^2 / g \bar{\sigma}_x^2 - A(l/\bar{\sigma}_x^2)} \right) \quad (11)$$

其中  $A(\gamma) = (\gamma + \sqrt{\pi\gamma} e^\gamma (1-2\gamma) Q(\sqrt{2\gamma}))^2$ ,  $B(\gamma) = \gamma - \gamma^2 e^\gamma \Gamma(0, \gamma)$ 。  $A(\gamma)$  和  $B(\gamma)$  的表达式中,  $Q(a) = \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$  为  $Q$  函数,  $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$  为非完备伽玛函数。公式(11)的证明如下:

由式(7)、(8), 可以推导出  $\alpha$  的表达式

$$\alpha = \frac{E[x^* f(x)]}{E[|x|^2]} \quad (12)$$

将功放模型式(3)带入上式并利用功放输入信号  $x$  的分布函数式(1), 可以得到

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_x^2} \left( E[x_\rho e^{-k|x|} \cdot f_\rho(x_\rho) e^{j\phi(x_\rho)}] \right) = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^\infty \rho \cdot \frac{\rho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{A_0}\right)^2}} \cdot f(\rho) d\rho = \frac{1}{\sigma_x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{\sigma_x^2}} e^{\frac{1}{\sigma_x^2}} \left( 1 - \frac{2}{\sigma_x^2} \right) Q \left( \sqrt{\frac{2}{\sigma_x^2}} \right) \quad (13)$$

对于畸变项  $d(t)$ , 其功率

$$\begin{aligned}\sigma_d^2 &= E[d^*(t)d(t)] = E[f^*(x)f(x)] - |\alpha|^2 E[x^*x] \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\rho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{A_0}\right)^2}} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{A_0}\right)^2}} \cdot f(\rho) d\rho - \left( \frac{1}{\sigma_x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{\sigma_x^2}} e^{\frac{1}{\sigma_x^2}} \left(1 - \frac{2}{\sigma_x^2}\right) \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2}{\sigma_x^2}}\right) \right)^2 \cdot \sigma_x^2 \\ &= A_0^2 \left( 1 - \frac{e^{\frac{1}{\sigma_x^2}} \Gamma(0, 1/\sigma_x^2)}{\sigma_x^2} - \left( \frac{1}{\sigma_x^2} + \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{\sigma_x^2}} \left(1 - \frac{2}{\sigma_x^2}\right) \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2}{\sigma_x^2}}\right) \right)^2 \right)\end{aligned}\quad (14)$$

将式(13), (14)带入式(9), 即可得到式(11)。证毕。

图3显示了  $\Gamma=1$  时, 归一化系统吞吐量  $R/B$  随归一化信号功率  $\sigma_x^2$  和归一化噪声功率  $\sigma_n^2$  的变化关系。可以看到, 当信号功率  $\sigma_x^2$  和信道增益  $g$  一定时, 归一化吞吐量  $R/B$  随噪声功率  $\sigma_n^2$  的减小而单调增大; 而当噪声功率  $\sigma_n^2$  和信道增益  $g$  一定时, 在信号功率  $\sigma_x^2$  较小时, 归一化吞吐量  $R/B$  会先随  $\sigma_x^2$  增大而逐渐增加。但随着  $\sigma_x^2$  增大, 由功放引起的畸变会越来越大, 最终导致系统吞吐量  $R/B$  在到达一个最大值后逐渐回落。

### 3.3 改进的贪婪算法

改进的贪婪算法以式(11)为基础, 能够根据信道增益和限幅失真这两个因素自适应地调节各天线上分配的功率, 最大化系统吞吐量。它将传统的贪婪算法做了如下改进: 在3.1节传统贪婪算法的步骤2)中, 计算多传输一个比特所需要增加的功率  $\Delta P_n$  时, 采用考虑了功放非线性失真的公式(11)来代替公式(4)。改进后的算法在总功率较小时与原算法性能相差不大, 但在总功率较大时性能增益明显。

## 4 仿真结果及分析

在本文的仿真中, 假设各天线子信道相互独立且均服从 Rayleigh 分布, 信道功率的平均增益为1, 仿真采用式(3)所示的 SSPA 功放模型, 并置其参数  $p=2$ 。系统的目标误比特率为  $BER_{target} = 10^{-6}$ 。分别仿真了 a) 系统无功放限幅, 传统贪婪算法; b) 系统有功放限幅, 改进的贪婪算法; c) 系统有功放限幅, 传统贪婪算法, 这三种情况下的归一化吞吐量  $R/B$ 。

图4显示了三种情况下, 归一化吞吐量  $R/B$  随平均信噪比  $\sigma_x^2/\sigma_n^2$  的变化关系。可以看到, 当信噪比较小的时候, 信号功率也较小, 远未达到功放的非线性区域, 功放限幅的影响非常小, 此时情况 b)、c) 下的性能与情况 a) 完全相同。随着信噪比的逐渐增大, 功放限幅的影响越来越大, 吞吐量逐渐呈现为 a) > b) > c) 的趋势, 并且三者之间的差距也越来越大。当信噪比高于某一临界点后, 由于传统的贪婪算法并未考虑到功放限幅引起的非线性失真, 因此依旧不断的增大功放的输入功率, 此时会导致 c) 的吞吐量下降。而改进的贪婪算法能够合理的分配功率, 抑制功放非线性失真的产生, 保持最优吞吐量。

## 5 结束语

本文提出了一种改进的贪婪算法, 综合考虑了信道增益及功放限幅的影响, 自适应的在天线之间

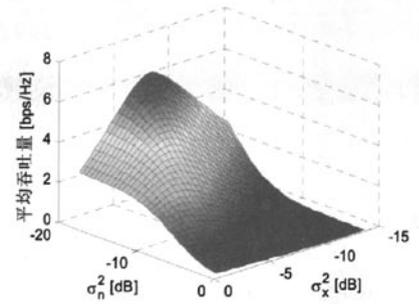


图3 归一化吞吐量  $R/B$  随  $\sigma_x^2$  和  $\sigma_n^2$  的变化关系

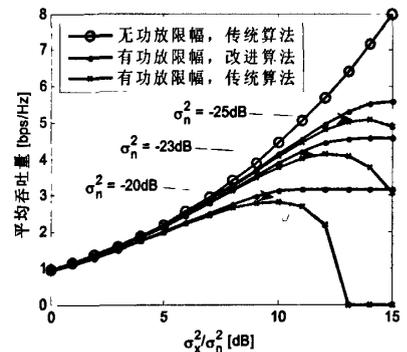


图4 归一化吞吐量  $R/B$  随  $\sigma_x^2/\sigma_n^2$  变化的仿真结果

合理分配功率，以达到容量最大化的目的。这种方法在总功率较小的时候性能与传统的贪婪算法相似，而在总功率较大的时候性能明显优于传统算法，解决了传统算法中出现的由功放限幅失真引起的吞吐量下降问题，更适合在实际系统中应用。

#### 参考文献：

- [1] Goldsmith A, Jafar S A, Jindal N, Vishwanath S. Capacity limits of MIMO channels [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2003, 21(5): 684-702.
- [2] G J Foschini, M J Gans. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas [J]. *Wireless Personal Communications*, 1998, 6(3): 311-335.
- [3] D Hughes-Hartogs. Ensemble modem structure for imperfect transmission media [P]. U.S. Patents Nos. 4, 679, 227 (July 1987), 4,731,816 (March 1988), and 4,833,706 (May 1989).
- [4] Lebrun G, Ying T, Faulkner M. MIMO transmission over a time-varying channel using SVD [A]. *Global Telecommunications Conference, 2002. GLOBECOM '02. IEEE* [C]. 2002-11, 1: 414-418; 17-21.
- [5] Ochiai H, Imai H. On the distribution of the peak-to-average power ratio in OFDM signals [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2001, 49(2): 282-289.
- [6] Zheng Zi-Wei, Yang Zhi-Xing, Pan Chang-Yong, Zhu Yi-Sheng. Performance analysis of the OFDM-based systems with nonlinear distortion and imperfect parameters estimation [J]. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 2004, 50(3): 835-843.
- [7] Forney G D Jr, Ungerboeck G. Modulation and coding for linear Gaussian channels [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1998, 44(6): 2384-2415.
- [8] Dardari D, Tralli V, Vaccari A. A theoretical characterization of nonlinear distortion effects in OFDM systems [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2000, 48(10): 1755-1764.

**作者简介：**彭晶波（1982-），男，博士生，研究方向为无线通信系统设计优化，MIMO 系统的资源分配策略，非线性失真抑制；金慈航（1982-），男，博士生，研究方向为无线通信系统中资源管理的跨层优化；卫国（1959-），男，教授，博士生导师，研究方向为移动通信与个人通信。

## Power allocation algorithm for systems with nonlinear distortion

PENG Jing-bo, JIN Ci-hang, WEI Guo

(PCN&SS Lab, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

**Abstract:** This paper focuses on power allocation problems for MIMO systems with nonlinear distortion caused by Power Amplifier (PA). For traditional Greedy Algorithm, power allocated to one antenna depends on the corresponding channel gain, which means extremely large power will be allocated on antennas with extremely low channel gain. In practical systems with PA, peak power of each antenna shall be limited to its linear region; otherwise serious signal distortion will be introduced and system performance will be degraded. In this paper, by analyzing the capacity of MIMO systems with nonlinear distortion, an improved greedy algorithm is proposed which can achieve a more accurate allocation between multiple transmit antennas. Simulation results also proves that the throughput of new algorithm is much higher than that of the traditional one when the total power constraint is high.

**Key words:** power allocation algorithm; greedy algorithm; nonlinear distortion; MIMO

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深, 让许多工程师望而却步, 然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上, 我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识, 借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养, 推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程, 化繁为简, 直观易学, 可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛, 让天线设计不再难...



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书, 课程从基础讲起, 内容由浅入深, 理论介绍和实际操作讲解相结合, 全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程, 可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计, 让天线设计不再难...

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程, 由经验丰富的专家授课, 旨在帮助您从零开始, 全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程, 边操作边讲解, 直观易学; 购买套装同时赠送 3 个月在线答疑, 帮您解答学习中遇到的问题, 让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程, 培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合, 全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作, 同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习, 可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试...

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立,一直致力和专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养;后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com)),现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地,成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程,广受客户好评;并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书,帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司,以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年, 10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养,更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果,又能免除您舟车劳顿的辛苦,学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲,结合实际工程案例,直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>