

文章编号 :1007-2861(2004)02-0111-04

FDTD(2,4)算法的数值色散特性 及其在微带天线中的应用研究

陈晓梅， 杨雪霞， 徐得名

(上海大学 通信与信息工程学院 , 上海 200072)

摘要 :该文研究了在时间上采用 2 阶差分、空间上采用 4 阶差分的高阶 FDTD(2,4) 数值方法 , 推导出其三维差分公式 , 并详细分析了其数值色散特性 . 另外 , 将 PML 吸收边界有效地应用于微带天线的计算 , 并与传统 FDTD(2,2) 数值结果进行了对比 . 结果证明高阶 FDTD(2,4) 算法能够有效减小数值色散和相速误差 , 而且可以降低对计算机内存的要求 , 减小计算量 , 适用的计算频段更高 .

关键词 :时域有限差分法 ; 数值色散 ; 数值相速 ; 微带天线 ; PML 吸收边界

中图分类号 :TN 01

文献标识码 :A

Numerical Dispersion of Higher-Order FDTD(2,4) and Applications to Microstrip Antenna

CHEN Xiao-mei, YANG Xue-xia, XU De-ming

(School of Communication and Information Engineering , Shanghai University , Shanghai 200072 , China)

Abstract : A higher-order finite-difference time-domain (FDTD) scheme with fourth order in space is studied for the solution of the Maxwell equations in the time domain and the three dimensional fourth-order difference formulas are obtained. The numerical dispersion characteristics of the higher-order FDTD(2,4) are analyzed in detail. Perfectly matched layer (PML) is carried out effectively in the calculation of the microstrip antenna. Numerical results show that the higher-order FDTD(2,4) scheme can reduce numerical dispersion and phase velocity errors. Computation complexity and memory requirements can be reduced , and the frequency bands to be calculated are extended.

Key words : finite-difference time-domain method ; numerical dispersion ; numerical phase velocity ; microstrip antenna ; PML absorbing boundary condition

时域有限差分法(FDTD)是目前电磁场领域内最活跃的数值计算方法之一 , 其适应性强 , 一次计算就可得到宽频带响应 , 适合模拟各种复杂电磁结构 , 在平面电路和天线等领域已得到关注^[1,2]. 随着通信系统射频部件工作频率的升高 , 要求天线尺寸越

来越小 , 而它所工作的平台相对其来说变成电大尺寸的物体 . 这些问题的计算需耗费很大的计算机资源及很长的运行时间 .

数值色散是影响 FDTD 法模拟电磁现象精确度的重要因素 , 直接关系到计算所需时间及对某类

具体对象模拟的可行性。数值色散的影响可以通过减小离散化过程所取时间和空间步长而无限减小，但这意味着计算网格空间数目的增加，因而相应地增加了对计算机存储空间和计算时间的要求。为了减小数值色散，许多学者作了大量研究工作，其中最有效的方法之一就是采用高阶 FDTD 算法^[3,4]，即把 Maxwell 旋度方程转化为差分方程时，在空间上采用四阶差分，而时间上仍为二阶差分，将其表示为 FDTD(2,4)。相应地，将 Yee 氏具有二阶精度的时域有限差分法表示为 FDTD(2,2)。

本文根据四阶差分的原理，推导了三维高阶 FDTD(2,4)的差分公式，从不同方面进一步详细研究了其数值色散特性。另外，将 PML 吸收边界有效地应用于 FDTD(2,4)，并与传统 FDTD(2,2)的计算结果及文献中的测量值进行了比较。

1 高阶 FDTD(2,4)差分公式

记 $F(x, y, z, t) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) =$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j,k)} = H_x^{n-\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j,k)} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{8} \left[E_y^n \Big|_{(i,j,k+\frac{1}{2})} - E_y^n \Big|_{(i,j,k-\frac{1}{2})} \right] - \\ \frac{1}{24} \left[E_y^n \Big|_{(i,j,k+\frac{3}{2})} - E_y^n \Big|_{(i,j,k-\frac{3}{2})} \right] \end{array} \right\} \\ \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{8} \left[E_z^n \Big|_{(i,j+\frac{1}{2},k)} - E_z^n \Big|_{(i,j-\frac{1}{2},k)} \right] - \\ \frac{1}{24} \left[E_z^n \Big|_{(i,j+\frac{3}{2},k)} - E_z^n \Big|_{(i,j-\frac{3}{2},k)} \right] \end{array} \right\}, \quad (2-1)$$

$$E_x^{n+1} \Big|_{(i,j,k)} = E_x^n \Big|_{(i,j,k)} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{8} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j+\frac{1}{2},k)} - H_z^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j-\frac{1}{2},k)} \right] - \\ \frac{1}{24} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j+\frac{3}{2},k)} - H_z^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j-\frac{3}{2},k)} \right] \end{array} \right\} - \\ \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{8} \left[H_y^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j,k+\frac{1}{2})} - H_y^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j,k-\frac{1}{2})} \right] - \\ \frac{1}{24} \left[H_y^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j,k+\frac{3}{2})} - H_y^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{(i,j,k-\frac{3}{2})} \right] \end{array} \right\}. \quad (2-2)$$

早半个时间步的值有关。而由 FDTD(2,2)差分公式得到的某网格点上各场分量的新值，只与它上一时间步的值及其四周半网格处另一场分量有关。因此，这里得到的 FDTD(2,4)差分公式要比 FDTD(2,2)的更精确。

另外，随着时间步的增长，保证算法的稳定性是一个很重要的问题。数值解是否稳定主要取决于时

$F(i, j, k)$ ，其中， $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz 分别表示在 x, y 和 z 坐标方向的网格空间步长， Δt 表示时间步长， i, j, k, n 均为整数。

根据文献[4]，三维场量在 x 方向的中心差分表示为：

$$\frac{\partial F(i, j, k)}{\partial x} = \frac{9}{8} \frac{F^n \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) - F^n \left(i - \frac{1}{2}, j, k \right)}{\Delta x} - \\ \frac{1}{24} \frac{F^n \left(i + \frac{3}{2}, j, k \right) - F^n \left(i - \frac{3}{2}, j, k \right)}{\Delta x} + O(\Delta x^4), \quad (1)$$

但文献未给出三维高阶 FDTD(2,4)的差分公式，我们由公式(1)推导出在各向同性、均匀无耗媒质中的麦氏方程差分形式如式(2-1)(2-2)。

其它场分量的差分方程类似。由此可见，在每一个网格点上，各场分量的新值不仅与该点在前一时间步长的值和该点周围半网格处另一场分量早半个时间步的值有关，而且与另一场分量的前一网格

间步长和空间步长之间的关系。

FDTD(2,2)和 FDTD(2,4)分别满足如下的稳定性条件^[4]：

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}, \quad (3)$$

$$\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}. \quad (4)$$

从以上公式可以看出, FDTD(2,4)的稳定性条件比FDTD(2,2)的更严格一些。

2 FDTD(2,4)数值色散特性

麦克斯韦方程组的有限差分数值算法的缺点是在计算网格空间所模拟的波形时会产生色散。在FDTD网格空间中存在的数值模,其相速取决于模的波长、传播方向以及网格单元的尺寸。这种数值色散能导致若干非物理性效应,如脉冲波形失真、人为的非均匀性和准折射现象等^[5]。可以将色散现象看作为在FDTD网格中数值波模相速对于真空中光速的偏差。

FDTD(2,4)和FDTD(2,2)的数值色散方程分别为^[4]:

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left(\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k_x\Delta x}{2}\right) \right] \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y} \left[\frac{9}{8} \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k_y\Delta y}{2}\right) \right] \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} \sin\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k_z\Delta z}{2}\right) \right] \right)^2, \quad (5)$$

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) \right]^2. \quad (6)$$

文献[4]研究了数值相速误差和波传播角度的关系。本文从另一个方面,即数值相速和空间步长的关系,分析比较FDTD(2,4)和FDTD(2,2)的数值色散特性。

取均匀网格划分 $\Delta x = \Delta y = \Delta z$,为了满足数值稳定性,设 $\Delta s = 2c\Delta t$,电磁波沿相对于 x 轴成 α 角度的方向传播,设波数为 k ,波长 $\lambda = 1$ m,则 $k_x = k \cos \alpha$, $k_y = k \sin \alpha$.运用牛顿迭代法,用C语言编程计算求数值相速 $v_p = \omega/k$.

图1(a)和(b)给出了 $\alpha = 45^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ (或 $\alpha = 0^\circ$)时数值相速随空间步长的变化情况。从图1(a)可看出,在 $\alpha = 45^\circ$ 方向上,FDTD(2,4)和FDTD(2,2)可取的最大空间步长分别为 0.6λ 和 0.5λ 。由此可见,如果用FDTD(2,4)算法,在相同计算精度下,可取的网格尺寸要比FDTD(2,2)大 0.1λ ,这样就节省了计算时间。

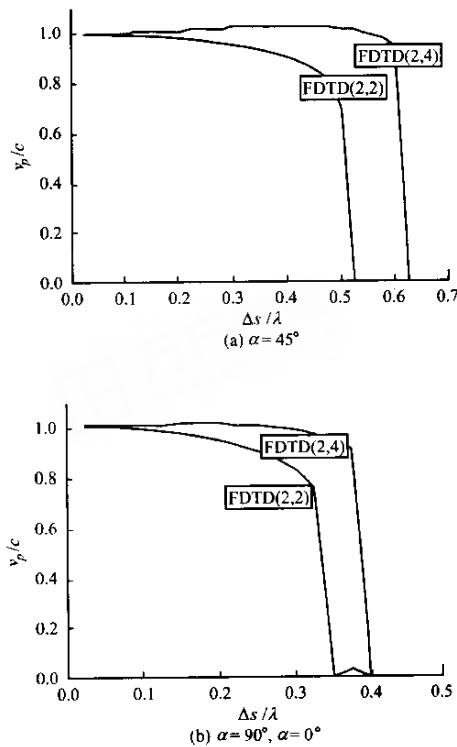


图1 不同空间步长 FDTD(2,4)和 FDTD(2,2)数值相速比较

Fig. 1 The comparison of the numerical phase velocity of FDTD(2,4) and FDTD(2,2) for different grid discretization

约了计算机资源。另一方面,给定同一空间步长,FDTD(2,4)的相速度更接近光速 c ,也就是说,在给定网格步长的计算空间中所能传播(相速度不为零)的电磁波的频率要比FDTD(2,2)算法中所能传播的频率高,这样就可使更高一些的频谱分量传播,更适合分析高频情况;而从计算精度考虑,在相同网格尺寸下,FDTD(2,4)算法要比FDTD(2,2)精确。

3 微带天线的计算实例

为了验证FDTD(2,4)算法的有效性,笔者分别用FDTD(2,4)和FDTD(2,2)算法对文献[6]中的微带天线编制了FORTRAN程序并进行了计算。

计算采用吸收性能良好的PML边界条件^[7],厚度设为8层。但值得注意的是,与FDTD(2,2)不同,在FDTD(2,4)计算中,各场分量的新值还与另一场分量的前一网格的值有关,所以FDTD(2,4)不能直接套用FDTD(2,2)的吸收边界条件。我们在PML吸收边界外加上Mur吸收边界^[8]作为二次吸收边界,从而可根据在边界内已知的场分量来估算

在吸收边界处的场分量. 例如 ,为了计算靠近边界两点 $Ez^{n+1}(x_{\max} - \Delta)$ 和 $Hx^{n+1/2}(x_{\max} - \Delta/2)$ 的值 , 必须知道边界处三点的 $Ez^n(x_{\max})$, $Ez^n(x_{\max} + \Delta)$ 和 $Hx^{n+1/2}(x_{\max} + \Delta/2)$, 边界处这三个未知场分量用 Mur 吸收边界作线性插值来求取.

取文献中的网格尺寸 , $\Delta x = 0.389$ mm , $\Delta y = 0.4$ mm , $\Delta z = 0.265$ mm , 方形贴片为 $32\Delta x \times 40\Delta y$, 微带线宽度 $6\Delta x$, 计算结果如图 2 所示. 可以看出在取此同样网格大小时 , 在 18 GHz 左右的谐振频率上 , FDTD(2,2) 计算的谐振频率为 18.14 GHz , 反射损耗为 -14.55 dB ; FDTD(2,4) 计算的谐振频率为 18.28 GHz , 反射损耗 -16.65 dB. 测试得到的谐振频率为 18.3 GHz , S_{11} 幅度为 -25 dB. 这说明 FDTD(2,4) 的计算结果和文献中的测量值相当接近 , 该方法更适合高频问题的分析.

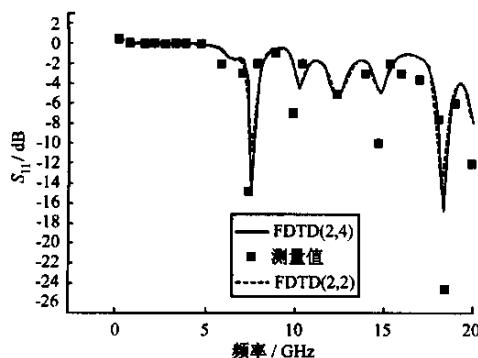


图 2 较小网格时两种 FDTD 计算结果比较

Fig. 2 The comparison of the results of FDTD(2,4) and FDTD(2,2) for smaller grid discretization

另外 , 取网格大小 $\Delta x = 0.778$ mm , $\Delta y = 0.8$ mm , $\Delta z = 0.265$ mm , 方形贴片为 $16\Delta x \times 20\Delta y$, 对该天线进行了同样的计算 , 如图 3 所示. 结果表明 , 当取该较大网格时 , FDTD(2,4) 计算结果仍然较为准确 , 其谐振频率分别为 7.63 GHz 和 18.2 GHz ; 而 FDTD(2,2) 相对就差一些 , 其谐振频率分别为 7.57 GHz 和 17.9 GHz. 因此取较大网格时 , FDTD(2,4) 仍然保持了较高的精度 , 而节约内存也是显而易见的. 另外从计算时间上来说 , 在相同配置的机器上运行 , 原来用小网格划分天线需 116 min , 而用大网格计算仅需 54 min. 这表明 FDTD(2,4) 算法能够提高计算精度 , 减小对内存的需求 , 提高计算速度.

4 结 论

FDTI₄ 算法与 FDTD(2,2) 相比 , 可有效提

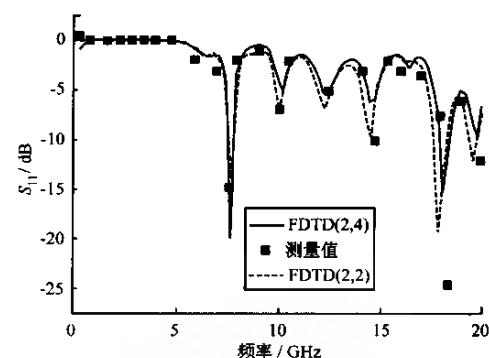


图 3 较大网格时两种 FDTD 计算结果比较

Fig. 3 The comparison of the results FDTD(2,4) and FDTD(2,2) for bigger grid discretization

高数值稳定性 , 减小数值相速误差 , 从而提高计算精度 , 并且更适于高频计算. 而在电大尺寸物体计算中 , 使用较大网格就能实现所需精度 , 降低了对计算机内存和速度的要求.

参考文献 :

- [1] Itoh T , Houshmand B. Time-domain methods for microwave structures [M]. New York : Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc , 1998. 59 – 75 ;381 – 402.
- [2] Taglob A. Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method [M]. Boston , London : Artech House , 1995. 81 – 105.
- [3] Lan Kang , Liu Yaowu , Lin Weigan. A Higher order (2,4) scheme for reducing dispersion in FDTD algorithm [J]. IEEE Trans on EMC , 1999 , 41 : 160 – 165.
- [4] Georgakopoulos Stavros V , Birtcher Craig R , et al. Higher-order finite-difference schemes for electromagnetic radiation , scattering , and penetration [J]. IEEE Antenna's and Propagation Magazine , 2002 , 44 : 134 – 142.
- [5] 高本庆. 时域有限差分法 [M]. 北京 : 国防工业出版社 , 1995. 29 – 33.
- [6] Sheen D M , et al. Application of the three-dimensional finite-difference time-domain method to the analysis of planar microstrip circuits [J]. IEEE Trans MTT , 1990 , 38(7) : 849 – 856.
- [7] Berenger J P. Three-dimensional perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves [J]. Journal of Computer Physics , 1996 , 127 : 363 – 379.
- [8] Mur J. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time domain electromagnetic field equations [J]. IEEE Trans Electromagn Compat , 1981 , EMC-23 : 849 – 856.

(编辑 高水娟)

如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训(www.edatop.com)专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



关于易迪拓培训:

易迪拓培训(www.edatop.com)由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网(www.mweda.com)，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>