

# 天线阵方向图乘积定理的研讨

姚国伟 薛正辉 李伟明 任武

(北京理工大学信息与电子学院, 北京 100081)

**摘要** 方向图乘积定理是在天线组阵过程中非常实用的理论。但是在研究端射天线阵时发现, 方向图乘积定理不能很好的适用于端射阵列。重新推导了阵因子的公式, 找出了端射阵列不符合方向图乘积定理的原因。希望在以后的研究中能够提出适用于端射的数学模型, 为端射组阵提供实用的理论。

**关键词** 方向图乘积定理; 天线阵; 端射阵

**中图分类号** TN982

## 引言

方向图乘积定理是在进行天线阵设计过程中用到的非常重要的定理。方向图乘积定理由下式给出<sup>[1]</sup>:

$$F(\theta, \phi) = F_1(\theta, \phi) \times F_2(\theta, \phi) \quad (1)$$

$F_1(\theta, \phi)$  是单元方向图,  $F_2(\theta, \phi)$  是阵因子方向图。也就是天线阵列方向图等于单元方向图与阵因子方向图的乘积。传统教科书上推导方向图乘积定理并没有给出适用条件, 简单地说天线阵列不考虑互耦的情况。其实在实际设计的大阵列当中, 除了边缘位置的天线, 方向图乘积定理还是可以得到很好的应用。于是很多时候会想当然认为方向图乘积定理适用于所有天线组阵情况。但是在研究高增益端射阵列时发现, 方向图乘积定理并不是完全适用<sup>[2-4]</sup>。重新对方向图乘积定理中的阵因子进行了推导, 并对比了实际物理意义。在端射时, 方向图乘积定理中对阵因子的假设跟实际端射情况存在较大出入, 原有的数学抽象模型并没有准确地描述端射阵列的物理意义。在端射阵中, 天线单元方向图对比真空中方向图发生了很大的变化, 并且由于端射方向的遮挡效应, 阵中各个单元的方向图差距较大。原有的用统一的单元方向图来简化也需要进行改进。

## 1 天线阵列理论

为了推导出阵因子, 一般都是假设天线单元为理想点源。拿一维阵列来说,  $n$  个各向同性的理想点源排列在一条直线上, 假设各个点源都等幅度且同相的, 间距为  $d$ , 角  $\phi$  是从  $x$  轴逆时针度量。如下图所示:

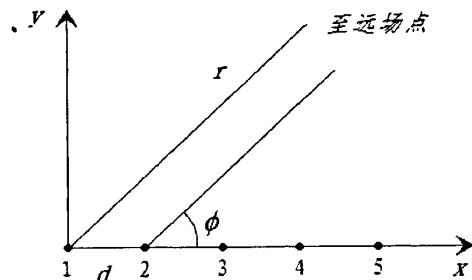


图1 点源阵列方向图

以坐标原点为参考相位, 则远区场某点处来自源 1 的场滞后来自源 2 的场  $d_r \cos \phi$ , 这里的  $d_r$  是两点源间用弧度表示的电距离  $d_r = 2\pi d / \lambda = \beta d$ 。于是在  $\phi$  的远区总场为:

$$E = E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} + \dots + E_0 e^{j(n-1)\psi} \\ = E_0 \frac{1 - e^{j(n-1)\psi}}{1 - e^{j\psi}} \quad (2)$$

其中  $\psi = d_r \cos \phi$  是来自相邻两点源之间的相位差,  $E_0$  是该场分量的幅度。当在连续可导点如果  $E' = 0$  时, 则  $E$  有极值。

$$E = E_0 \frac{(1 - e^{jd_r \cos \phi})(1 - e^{jd_r \cos \phi}) - (1 - e^{jd_r \cos \phi})(1 - e^{jd_r \cos \phi})}{(1 - e^{jd_r \cos \phi})^2} \\ = E_0 \frac{(-j \sin \phi d_r n e^{jd_r \cos \phi})(1 - e^{jd_r \cos \phi})}{(1 - e^{jd_r \cos \phi})^2} - \\ E_0 \frac{(-j \sin \phi d_r n e^{jd_r \cos \phi})(1 - e^{jd_r \cos \phi})}{(1 - e^{jd_r \cos \phi})^2}$$

如上式所示, 如果  $E' = 0$ , 由于  $E_0 \neq 0$ , 则必须在  $1 - e^{jd_r \cos \phi} \neq 0$  时, 分子

$$(-j \sin \phi d_r n e^{jd_r \cos \phi})(1 - e^{jd_r \cos \phi}) - \\ (-j \sin \phi d_r n e^{jd_r \cos \phi})(1 - e^{jd_r \cos \phi}) = 0 \quad (4)$$

解此方程可得  $\phi = 0^\circ$  和  $\phi = 180^\circ$ , 另外在  $E$  不可导点, 则当  $1 - e^{jd_r \cos \phi} = 0$  得到  $\phi = 90^\circ$  和  $\phi = 270^\circ$  也是函数的极值点。并且可以证明  $\phi = 0^\circ$  和  $\phi = 180^\circ$  是极小值点,  $\phi = 90^\circ$  和  $\phi = 270^\circ$  是极大值点。

这是典型的侧射阵列理论, 阵列单元由完全相同的各向同性的点源组成。我们可以把单元推广到更一般的情况, 就是阵列单元由相似的同性点源组成。点源还是等幅, 等间距, 但是点源的相位依次递变了  $\delta$ 。则来自相邻点源的场之间的总相位差为:

$$\psi = d_r \cos \phi + \delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \phi + \delta \quad (5)$$

则阵列的总场还可以用下式表示:

$$E = E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} + \dots + E_0 e^{j(n-1)\psi} \\ = E_0 \frac{1 - e^{j(n-1)\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{e^{j(n-1)\psi/2} (e^{j(n-1)\psi/2} - e^{-j(n-1)\psi/2})}{e^{j\psi/2} (e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2})} \quad (6)$$

但是相邻点源的相位差与各项同性的点源发生了变化。从而得到:

$$E = E_0 e^{j\xi} \frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)} = E_0 \frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \angle \xi \quad (7)$$

式中  $\xi$  是以来自源点 1 的场为参考的相位角, 有  $\xi = \frac{n-1}{2}\psi$ , 如果修改成以阵列的中心为参考, 则变成  $E = E_0 \frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)}$ 。

端射天线是使阵列的最大值出现在  $\phi = 0^\circ$  的方向上, 所以  $\delta = -d_r$ , 也就是端射阵的源间相位的递减数与源间间距的递增数恰好相等。由汉森伍德给出的增强型端射条件是  $\delta = -d_r - \frac{\pi}{n}$ , 可以获得比普通的端射更强的方向性。端射阵列如图 2 所示:

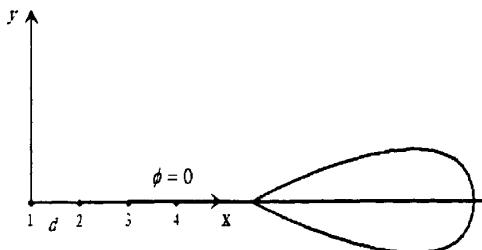


图 2 端射阵列示意图

## 2 天线阵列理论适用的条件

通过上面的数学分析, 阵列天线的基础是把天线单元简化为理想点源来进行分析计算的。计算结果在侧射情况下是准确的, 并且得出了在  $\phi = 90^\circ$  和  $\phi = 270^\circ$  得到极大值的结论跟实际的侧射天线阵是吻合的。但是在端射情况下是不够准确的,

数学计算出当相位递变  $\delta = -d$  时阵列在端射方向取得最大值, 但是最大值小于增强型端射阵列的极值。通过上面的分析, 可以看出端射天线是侧射天线的一种极限情况, 也就是在  $\phi = 0$  时取得极大值的情况。我们假设的前提是阵列单元为同性的点源, 所以可以沿着任意方向辐射电磁波。在端射情况下, 第  $n$  个点源比第  $n-1$  个点源仅仅少传播了一个  $d$ 。由于点源是假设出来的无穷小点, 它没有几何结构尺寸, 所以在微波天线阵中无论任何波长都可以绕过前方的点源。也就是说第  $n$  个点源对第  $n-1$  个点源的遮挡作用并没有体现出来, 所以我们开始时按照阵列天线的方向图乘积定理分析端射天线是不准确的。但是由于侧射阵列没有遮挡效应, 所以我们计算出在  $\phi = 90^\circ$  和  $\phi = 270^\circ$  可以得到最大值是准确的。这也就是当相邻点源相差  $\delta = -d$  时并没有得到最强的方向性的原因。

实际上除了端射这种极端情况, 在  $\phi < 30^\circ$  和  $\phi > 150^\circ$  范围内, 天线之间的互耦已经严重到不能让波束主瓣按照计算方向进行照射, 方向图乘积定理已经不能直接使用<sup>[6]</sup>。端射阵列只是这个范围内的最极端情况。天线单元由于在端射阵列中所处的位置不同, 互耦对每个单元方向图的影响也不相同, 靠近端射方向的单元方向图所受影响最大, 远离端射方向的单元方向图所受影响最小。

### 3 结 论

本文从方向图乘积定理出发, 重新推导了理想点源的阵因子。并对比数学模型和实际物理模型, 说明了方向图乘积定理不完全符合端射阵的原因。结合工程手册给出了方向图乘积定理的适用范围。对适合于端射阵列的数学抽象模型正在进一步研究中, 希望在不久的将来可以得到能过针对端射阵实用的天线阵列理论。

### 参 考 文 献

- [1] D. Kraus, J. Marhefka, *Antennas: for all applications*[M], third edition. The McGraw-Hill Companies, 2002, pp71-96.
- [2] Liu Zhong-kai, Xue Zheng-hui and Gao-Benqing. Research

on the EM Field on the Surface of a Surface Wave Antenna[C]: IEEE 2007 International Symposium on Microwave, Hangzhou, China, August 16-18, 2007.

- [3] YAO Guo-wei, XUE Zheng-hui, LI Wei-ming, et al. The research of plate end-fire antenna[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2009, 24(2): 323-326.(in Chinese)
- [4] YAO Guo-wei, Xue Zheng-hui, Liu Zhong-kai, et al. Design of high-directivity end-fire antenna array[C], 2008 International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology, Nanjing, China, April 21-24, 2008.
- [5] F. Ares, R. S. Elliott, and E. Moreno, Design of Planar Arrays to Obtain Efficient Footprint Patterns with an Arbitrary Boundary[J], IEEE Trans On Antennas and Propagation, 1994, 39(11): 1509-1514.
- [6] 罗伯特.相控阵天线手册[M].南京电子技术研究所译.北京:电子工业出版社, 2007: 35-45.

**姚国伟** (1982-), 男, 河北人, 2006年毕业于北京理工大学电磁场与微波专业, 现为北京理工大学电磁场与微波专业博士生, 主要研究方向为高增益端射天线阵。

**薛正辉** (1970-) 男, 上海人, 现为北京理工大学电子工程系副教授。1992年毕业于北京理工大学电子工程系, 1995年在同校电磁场与微波技术专业获工学硕士学位并留校任教, 2002年获得北京理工大学电磁场与微波技术专业博士学位。主要从事电磁场与微波技术方面的教学和计算电磁学、电磁兼容及天线与天线测试技术、微波毫米波技术方面的有关研究。发表论文四十余篇。

**李伟明** (1967-), 男, 江西人, 北京理工大学副教授, 博士, 主要从事电磁散射分析与系统电磁兼容优化设计等方面研究。

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立,一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养;后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com)),现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地,成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程,广受客户好评;并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书,帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司,以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年, 10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养, 更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果, 又能免除您舟车劳顿的辛苦, 学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲, 结合实际工程案例, 直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>