

卡塞格伦天线系统中 天线座坐标系与目标波束坐标系的关系

孙 九 如

(船舶重工集团公司 723 所, 扬州 225001)

摘要 介绍了《数字式天线定位系统与方法》一文中所讲的飞机坐标系(雷达波束坐标系)与目标波束坐标系之间相互关系的变换矩阵 T 的推导方法。馈源发射的雷达波束坐标系经平板反射天线(卡塞格伦天线)反射后成为一个新的目标波束坐标系。当采用坐标旋转方法来推导上述二者关系时, 反射板在对雷达波束坐标系的反射过程中, 使坐标系发生一个旋转效应——旋转角 β 。求解旋转角 β , 最终得到飞机坐标系(雷达波束坐标系)、反射板坐标系与目标波束坐标系这三者的关系式—— T 矩阵的表达式。

关键词 卡塞格伦天线 目标波束 旋转效应 变换矩阵 垂直极化

0 引言

《数字式天线定位系统与方法》是美国的一个专利发明, 它已被应用在机载雷达上。文章介绍了卡塞格伦天线运动的伺服控制方法。该文的中译文刊载在我国《空载雷达》1978 年第 1 期上。

文中提到:“本发明与雷达系统有关, 具体地说, 它阐述了雷达天线, 特别是采用驱动波束反射板(即卡塞格伦)这类雷达天线定位用的数字方法与系统, 在这类天线中, 反射板的位置与雷达波束位置呈一复杂函数关系。”又说:“在卡塞格伦天线中, 没有直接与雷达波束配合一致或者与雷达天线 1 比 1 运动关系的机械元件。而雷达波束的角位置与反射板相对于一组预先确定的偏转角有关, 业已证明, 这种关系极其复杂,

本文就是为了解读天线座坐标系与目标波束坐标系之间“极其复杂”的几何关系, 而对文章中所说的“复杂函数”进行全过程的详细推导。从而为伺服控制系统的设计提供正确的运动和位置依据。

有几种方法可以推导出该“复杂函数”的结

果。本文介绍一种最直观、最基本, 同时也是最容易懂的方法——几何法。

1 目标波束(视线) X_L 在天线座坐标系中的方位角 λ_a 和俯仰角 λ_e

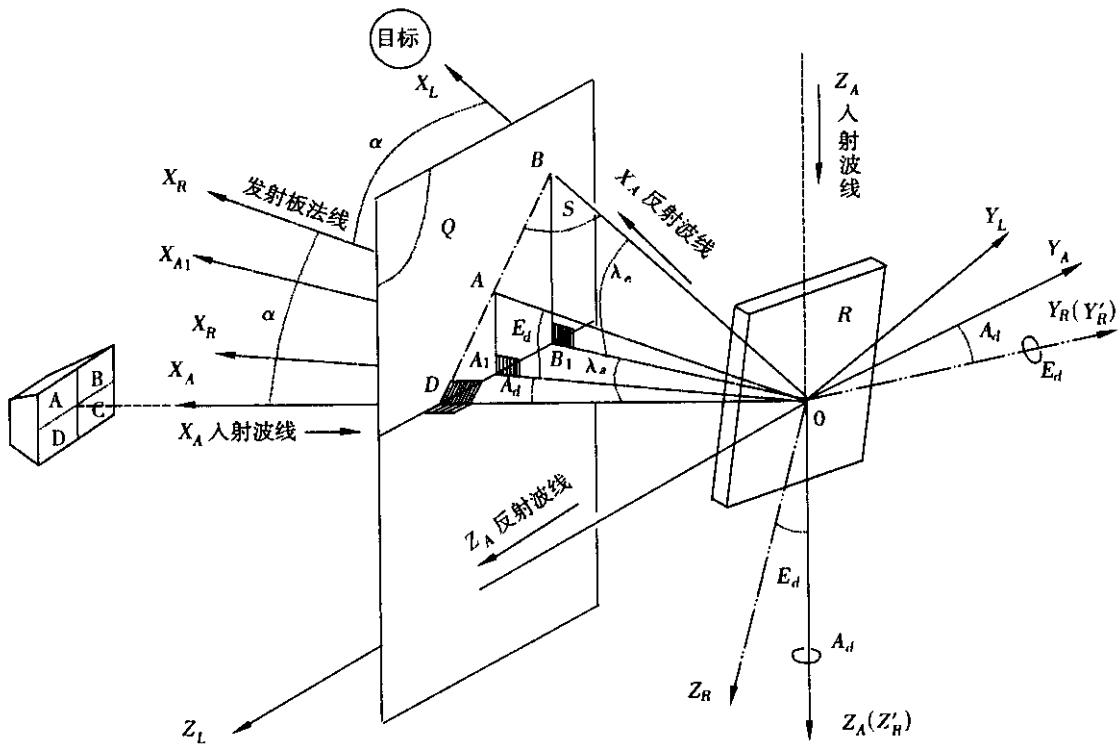
天线座坐标系 $X_A Y_A Z_A O$, 目标波束坐标系 $X_L Y_L Z_L O$ 以及反射板坐标系 $X_R Y_R Z_R O$ 的相互关系表示在图 1 中。

1.1 坐标系的说明

$X_A Y_A Z_A O$ 为天线座坐标系, X_A 与飞机轴线平行, Z_A 指向机身的下方, Y_A 则根据右手法则确定。该坐标系也就是《数字式天线定位系统与方法》一文中所说的“飞机坐标系”。

$X_R Y_R Z_R O$ 为反射板坐标系。它是 $X_A Y_A Z_A O$ 坐标系先绕方位轴 Z_A 旋转角度 A_d (方位角), 得新坐标系 $X'_R Y'_R Z'_R O$, 然后绕俯仰轴 Y'_R 旋转角度 E_d (俯仰角) 所得。

$X_L Y_L Z_L O$ 为目标波束坐标系。它是这样的一个坐标系: X_L 为与 X_A 轴重合的入射波线的反射波线; Z_L 为与 Z_A 轴重合的入射波线的反射波线; 当然 Y_L 也就是与 Y_A 轴重合的入射波线的反射波线。

图 1 目标波线 X_L 的位置

1.2 求解 X_L 在天线座坐标系中的方位角 λ_a 和俯仰角 λ_e

过 X_R 轴上一点 A 作平面 Q , 使其平行于 $Y_A O Z_A$ 平面。由平面反射性质我们知道, 轴 X_A 、 X_R 、 X_L 三者同在一个平面 S 内, 且 $\angle X_A O X_R = \angle X_R O X_L$ ($\angle X_A O X_R$ 表示直线 X_A 与 X_R 的夹角)。令 $\angle X_A O X_R = \angle X_R O X_L = \alpha$, 点 B 为 X_L 与平面 Q 的交点, 点 D 为 X_A 与平面 Q 的交点。过点 A 、 B 分别作平面 $X_A O Y_A$ 的垂线并交之于 A_1 、 B_1 。很显然, 直线 AA_1 和直线 BB_1 都垂直于平面 $X_A O Y_A$ 内的所有直线。设 OA 为单位长度, 即 $OA=1$ 。

① 在直角 $\triangle O A A_1$ 中:

$$A A_1 = OA \cdot \sin E_d = \sin E_d \quad (1)$$

$$O A_1 = OA \cdot \cos E_d = \cos E_d \quad (2)$$

② 在直角 $\triangle O A_1 D$ 中:

$$O D = O A_1 \cdot \cos A_d = \cos A_d \cdot \cos E_d \quad (3)$$

$$A_1 D = O A_1 \cdot \sin A_d = \sin A_d \cdot \cos E_d \quad (4)$$

③ 在直角 $\triangle O A D$ 中:

$$O D = O A \cdot \cos \alpha = \cos \alpha = \cos A_d \cdot \cos E_d \quad (5)$$

$$A D = O A \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d} \quad (6)$$

④ 分析直角 $\triangle O B D$ 中的边角关系及相似三角形 $\triangle A A_1 D_1$ 与 $\triangle B B_1 D$ 中对应边的关系, 我们将得到:

$$O B = \frac{\cos A_d \cdot \cos E_d}{2 \cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1} \quad (7)$$

$$B B_1 = \frac{2 \cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d \cdot \sin E_d}{2 \cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1} \quad (8)$$

$$B_1 D = \frac{2 \cos^2 A_d \cdot \cos^3 E_d \cdot \sin A_d}{2 \cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1} \quad (9)$$

⑤ 从图 1 中可得:

$$\begin{aligned} A_1 B_1 &= B_1 D - A_1 D \\ &= \frac{\sin A_d \cdot \cos E_d}{2 \cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1} \end{aligned} \quad (10)$$

⑥ 在直角 $\triangle O B B_1$ 中:

$$\sin \lambda_e = \frac{B B_1}{O B} = \cos A_d \cdot \sin(2E_d) \quad (11)$$

从而得:

$$\cos \lambda_e = \sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \sin^2(2E_d)} \quad (12)$$

⑦ 在直角 $\triangle O B_1 D$ 中:

$$\operatorname{tg} \lambda_a = \frac{B_1 D}{O D} = \frac{\sin(2A_d) \cdot \cos^2 E_d}{2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1} \quad (13)$$

从而得：

$$\cos \lambda_a = \frac{2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1}{\sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \sin^2(2E_d)}} \quad (14)$$

$$\sin \lambda_a = \frac{\sin(2A_d) \cdot \cos^2 E_d}{\sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \sin^2(2E_d)}} \quad (15)$$

2 旋转角 β

由于反射板坐标系与雷达目标波束坐标系不重合，所以当反射板 R 的方位角 A_d 与俯仰角

E_d 都不等于零时，反射板对目标波束坐标系有一个“特殊的旋转效应”——旋转角 β 。角度 β 是平板反射天线在跟踪目标运动中正确定位的一个关键。求解旋转角 β 的方法示于图 2 中。

根据前面的约定，目标波束坐标系 $X_L Y_L Z_L O$ 中各轴是由与天线座坐标系 $X_A Y_A Z_A O$ 中各对应轴重合的入射波线经反射板 R 反射后形成的（见 1.1），那么坐标系 $X_L Y_L Z_L O$ 与坐标系 $X_A Y_A Z_A O$ 必然符合反射性质，即：

(1) 入射波线、反射板法线、反射波线三者

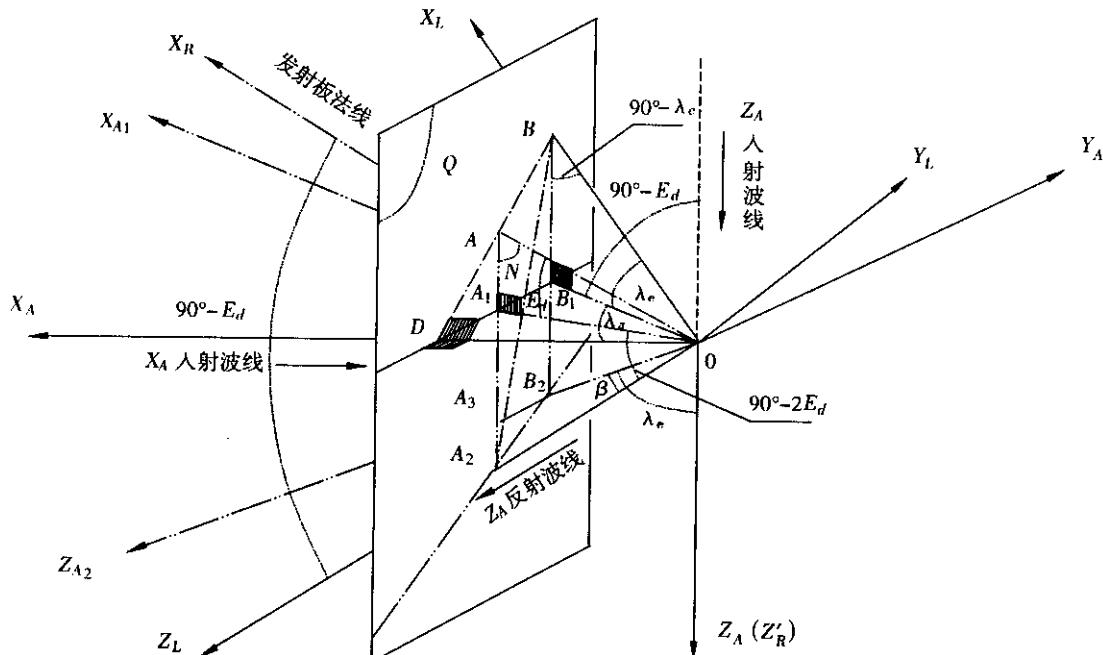


图 2 目标波线 Z_L 的位置

同在一个平面内（如图 1 中的平面 S ）；

(2) 反射角等于入射角；

(3) 所有同在一个平面（如图 2 中 $X_A O Z_A$ 平面）内的入射波线其对应的反射波线也必然同在（另）一个平面（图 2 中 $X_L O Z_L$ 平面）内；

(4) 两反射线的夹角与对应两入射线的夹角相同。

2.1 确定轴 Z_L 的位置

确定了 X_L 轴的位置，再来确定 Z_L 轴的位置。只要 X_L 、 Z_L 确定了，坐标系 $X_L Y_L Z_L O$ 也就自然地被确定下来了。

由前面的作图可知，直线 AA_1 、 Z_A 、 X_R 以及 Z_L 同在一个平面 N 内。 AA_1 与 Z_L 相交于一点，设其为 A_2 。由 $\angle AOA_1 = E_d$ ，得 $\angle X_R O Z_A = 90^\circ - E_d$ （注：这里的“ Z_A ”是指与 Z_A 重合的入射波线，如图 2）， $\angle X_R O Z_L = 90^\circ - E_d$ （性质②）。

2.2 确定旋转角 β

① 从图 2 可得： $\angle A_1 O A_2 = \angle X_R O Z_L - \angle A O A_1 = 90^\circ - 2E_d$ 。

在直角 $\triangle OA_1 A_2$ 中：

$$OA_2 = \frac{OA_1}{\cos \angle A_1 O A_2} = \frac{1}{2\sin E_d} \quad (16)$$

$$A_1 A_2 = OA_1 \cdot \operatorname{tg} \angle A_1 O A_2 = \frac{\cos(2E_d)}{2\sin E_d} \quad (17)$$

② 延长直线 BB_1 交平面 $Y_L O Z_L$ 于点 B_2 , 连接 O, B_2 , 令 OB_2 为轴 Z_{A2} 。

与 2.1 的证明方法一样, 我们得到 Z_A, Z_{A2}, X_L 三者在同一平面 P 内。令 $\angle Z_A O Z_{A2} = \beta$, 分析得夹角 $\angle Z_A O Z_{A2} = \lambda_e$ 。

在直角 $\triangle OBB_2$ 中 $\angle OB_2 B = \lambda_e$, 则:

$$\begin{aligned} BB_2 &= \frac{OB}{\sin \angle O B_2 B} = \frac{OB}{\sin \lambda_e} \\ &= \frac{1}{2(2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1) \cdot \sin E_d} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} OB_2 &= \frac{OB}{\operatorname{tg} \angle O B_2 B} = OB \cdot \frac{\cos \lambda_e}{\sin \lambda_e} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \sin^2(2E_d)}}{2(2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1) \cdot \sin E_d} \end{aligned} \quad (19)$$

由图 2 可看出:

$$\begin{aligned} B_1 B_2 &= BB_2 - BB_1 \\ &= \frac{1 - \cos^2 A_d \cdot \sin^2(2E_d)}{2(2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1) \cdot \sin E_d} \end{aligned} \quad (20)$$

③ 在平面 Q 内过点 B_2 作直线 $A_1 A_2$ 的垂线, 并交 $A_1 A_2$ 于点 A_3 , 则:

$$\begin{aligned} A_2 A_3 &= A_1 A_2 - B_1 B_2 \\ &= \frac{\sin^2 A_d \cdot \cos^2 E_d}{(1 - 2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d) \cdot \sin E_d} \end{aligned} \quad (21)$$

④ 在直角 $\triangle A_2 A_3 B_2$ 中:

$$\begin{aligned} A_2 B_2^2 &= A_2 A_3^2 + A_3 B_2^2 = A_2 A_3^2 + A_1 B_1^2 \\ &= \frac{\sin^2 A_d \cdot \cos^2 E_d \cdot (1 - \cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d)}{(2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1)^2 \cdot \sin^2 E_d} \end{aligned} \quad (22)$$

⑤ $\triangle OA_2 B_2$ 中, 根据余弦定理有(如图 2):

$$\begin{aligned} A_2 B_2^2 &= OA_2^2 + OB_2^2 - \\ &\quad 2O A_2 \cdot O B_2 \cdot \cos \beta \end{aligned} \quad (23)$$

将式(16)、(19)、(22)代入上式得:

$$\cos \beta = \frac{\cos(2E_d)}{\sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \sin^2(2E_d)}} \quad (24)$$

从而有:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= \frac{\sin A_d \cdot \sin(2E_d)}{\sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \sin^2(2E_d)}} \end{aligned} \quad (25)$$

从图 2 中我们很清楚地可以看出, 角度 β 就是平面 $X_L O Z_L$ 和平面 $X_L O Z_{A2}$ 的夹角。该角度

β 反映了反射板对入、反射波束坐标系之间的“特殊的旋转效应”。

2.3 去旋函数 C

设坐标系 $X_L Y_L Z_L O$ 绕轴 X_L 旋转角度 $-\beta$ 后得新坐标系 $X_{A2} Y_{A2} Z_{A2} O$ (见图 3), 那么这 2 个坐标系的坐标关系可由坐标系的变换矩阵得到, 即:

$$\begin{Bmatrix} X_{A2} \\ Y_{A2} \\ Z_{A2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{Bmatrix} \quad (26)$$

矩阵行列式中元素 $a_{11} (=1)$ 的子式为:

$$c = \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad (27)$$

由式(12)、(14)得:

$$\cos \lambda_a \cdot \cos \lambda_e + 1 = 2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d \quad (28)$$

$$\cos \lambda_a + \cos \lambda_e = 2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d \cdot \frac{\cos(2E_d)}{\sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d}} \quad (29)$$

由式(11)、(15)得:

$$\begin{aligned} \sin \lambda_e \cdot \sin \lambda_a &= 2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d \cdot \sin A_d \cdot \\ &\quad \frac{\sin(2E_d)}{\sqrt{1 - \cos^2 A_d \cdot \sin^2(2E_d)}} \end{aligned} \quad (30)$$

将式(29)÷(28)并结合式(24), 便得到:

$$\cos \beta = \frac{\cos \lambda_a + \cos \lambda_e}{\cos \lambda_a \cdot \cos \lambda_e + 1} \quad (31)$$

将式(30)÷(28)并结合式(25), 得到:

$$\sin \beta = \frac{\sin \lambda_a \cdot \sin \lambda_e}{\cos \lambda_a \cdot \cos \lambda_e + 1} \quad (32)$$

将式(31)、(32)代入式(27)得:

$$C = \frac{1}{\cos \lambda_a \cdot \cos \lambda_e + 1} \cdot \begin{vmatrix} \cos \lambda_a + \cos \lambda_e & -\sin \lambda_a \cdot \sin \lambda_e \\ \sin \lambda_a \cdot \sin \lambda_e & \cos \lambda_a + \cos \lambda_e \end{vmatrix} \quad (33)$$

式(33)即为该文中所提到的“去旋函数 C ”。

3 天线座坐标系与雷达目标波束坐标系间坐标关系变换矩阵 T

通过上面的推导, 变换矩阵 T 的求解就显得很简单了。它实际上就是坐标系转换的变换矩阵。根据坐标系旋转的右手规则, 坐标系 $X_L Y_L Z_L O$ 向坐标系 $X_A Y_A Z_A O$ 转换时的旋转角为负值(如图 3)。坐标系 $X_L Y_L Z_L O$ 经 3 次旋转

(转角依次为 $-\beta$, $-\lambda_e$, $-\lambda_a$) 后便得坐标系 $X_A Y_A Z_A O$ 。二者之间的坐标关系为:

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_a \cdot \cos\lambda_e & \cos\lambda_a \cdot \sin\lambda_e \cdot \sin\beta - \sin\lambda_a \cdot \cos\beta & \cos\lambda_a \cdot \sin\lambda_e \cdot \cos\beta + \sin\lambda_a \cdot \sin\beta \\ \sin\lambda_a \cdot \cos\lambda_e & \sin\lambda_a \cdot \sin\lambda_e \cdot \sin\beta + \cos\lambda_a \cdot \cos\beta & \sin\lambda_a \cdot \sin\lambda_e \cdot \cos\beta - \cos\lambda_a \cdot \sin\beta \\ -\sin\lambda_e & \cos\lambda_e \cdot \sin\beta & \cos\lambda_e \cdot \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{Bmatrix} \quad (34)$$

最后, 将式(11)、(12)、(14)、(15)、(24)、(25)代入上式矩阵中各元素 T_{ij} , 运算化简后就

$$T = \begin{bmatrix} 2\cos^2 A_d \cdot \cos^2 E_d - 1 & -\cos^2 E_d \cdot \sin(2A_d) & \cos A_d \cdot \sin(2E_d) \\ \cos^2 E_d \cdot \sin(2A_d) & -(2\cos^2 E_d \cdot \sin^2 A_d - 1) & \sin A_d \cdot \sin(2E_d) \\ -\cos A_d \cdot \sin(2E_d) & \sin A_d \cdot \sin(2E_d) & \cos(2E_d) \end{bmatrix} \quad (35)$$

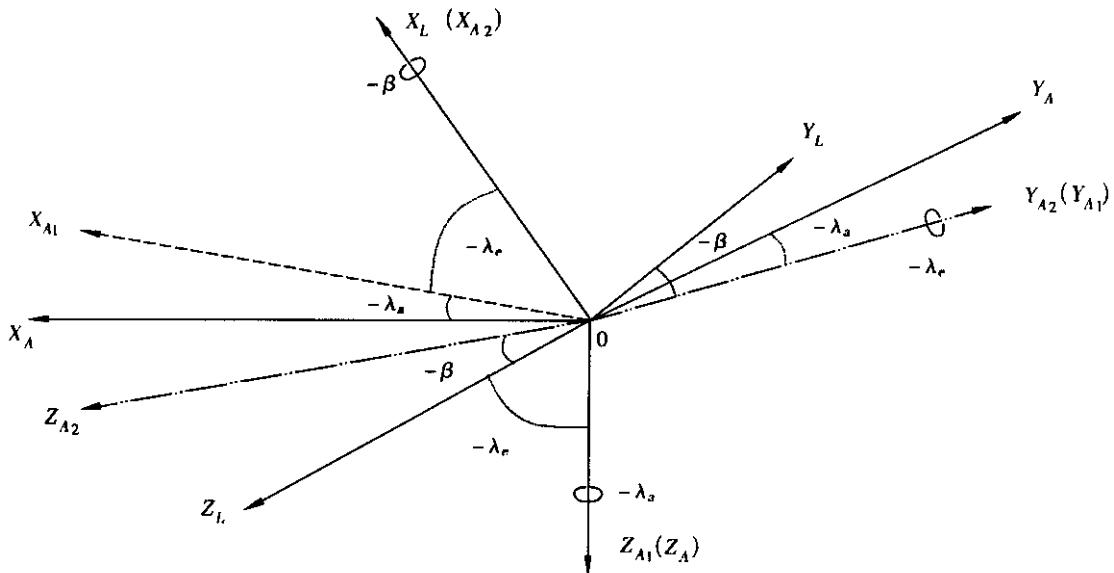


图 3 坐标系旋转关系

4 结束语

对于采用波束反射板式的雷达天线, 其波束是经过平板的 1 次反射后指向目标的。由于馈源相对于飞机(即天线座)是不动的, 所以雷达波束经反射后能否正确指向目标, 全部依靠波束反射板的准确定位。而要做到反射板的准确定位,

就必须知道飞机坐标系(入射波束坐标系)、反射板坐标系、目标(反射)波束坐标系这三者的关系。

通过上面的分析推导, 知道了平板对雷达波束反射时存在一个特殊的旋转效应。这一旋转效应是推导 T 矩阵的关键之所在。

如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训(www.edatop.com)专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



关于易迪拓培训:

易迪拓培训(www.edatop.com)由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网(www.mweda.com)，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>