

智能天线约束矩阵特征值的性质

李玉国， 赵淑清
(北京化工大学， 北京 100029)

摘要：针对约束矩阵具有与其所对应的零陷个数相同数量的大特征值的性质，应用盖氏圆盘定理比较精确地估计一个零陷情况下约束矩阵特征值的界。另外应用几何描述来详细说明了多个零陷时每个对应一个零陷的约束矩阵的特征值之间的相互扰动。

关键词：智能天线；约束矩阵；零陷；特征值

中图法分类号：TN820.1+2； TN821.91 文献标识码：A 文章编号：1000-7024(2005)09-2433-02

Character of eigenvalues of constraint matrix

LI Yu-guo, ZHAO Shu-qing
(Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The character of the eigenvalues of the constraint matrix was aimed, and the character is that the matrix has the same number of larger eigenvalues as number of the nulls that the matrix denoted. The bound of the eigenvalues of constraint matrix was estimated with one null by using gersgorin theorem accurately. Otherwise, on the aspect of mathematics, the perturbation was explained between eigenvalues of constraint matrixes of multiple nulls for one null by geometrical description.

Key words: smart antenna; constraint matrix; null; eigenvalue

1 引言

阵列天线设计的一个最基本问题是决定阵列的辐射方向图。一般的要求是给定天线的工作频率和阵元间距，使天线方向图具有特定的主瓣宽度和旁瓣电平。不论是雷达还是无线电通信，使其天线方向图具有灵活的零陷功能是现代智能化天线所追求的目标。

假设空间各个方向同时存在功率相同的信号，这时天线阵输出信号的功率等于天线方向图曲线下的面积。若想在指定的方向上限制输出信号的功率，减小它在整个阵列输出信号功率中所占的比例，那么，必须提出一个约束条件，使天线方向图在这个指定的空间区域上的功率尽可能的小，而在方向图的其它部分尽可能地与原始方向图（如切比雪夫加权方向图）一致。这个问题最终归结为求零陷功率约束下最小二乘问题。

设由 N 个无方向性的阵元组成均匀线性阵列，相邻阵元间距为 d 。天线的远场辐射方向图可表示为

$$G(\theta)=W^H a(\theta) \quad (1)$$

式中 H 表示矩阵或向量的共轭转置， W 是一个 N 维复权向量

$$W=[w_1, w_2, \dots, w_N]^T \quad (2)$$

$a(\theta)$ 是阵列的 N 维方向向量

$$a(\theta)=\left[1, \exp(j2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta), \dots, \exp(j2\pi\frac{(N-1)d}{\lambda}\sin\theta)\right]^T \quad (3)$$

收稿日期：2004-07-21。

作者简介：李玉国（1979-），男，天津人，硕士，研究方向为信号处理；赵淑清（1956-），女，哈尔滨人，教授，研究方向为智能天线和遥感图像处理。

式中 λ 是来波的波长， θ 为来波方向与阵列法线方向的夹角。

带零陷的天线阵方向图综合问题，可以表示为零陷功率约束下最小二乘问题

$$\begin{cases} \min_w \|W - W_0\|^2 \\ W^H Q W = \varepsilon \end{cases} \quad (4)$$

式中 W_0 是天线的原始权向量， W 是待求的优化权向量，常数 $\varepsilon \geq 0$ 表示在要形成零陷的区域上方向图的均方零陷深度。由于

$$W^H Q W = \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} W^H a(\theta) a^H(\theta) W d\theta \leq \xi \quad (5)$$

约束矩阵 Q 是 $N \times N$ 维埃尔米特矩阵，且

$$Q = \Gamma A \Gamma^H \quad (6)$$

式中 Γ 是由 Q 的特征向量构成的酉矩阵， A 是由 Q 的特征值构成的 $N \times N$ 维对角阵

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (7)$$

N 个特征值是按降序排列的。式(8)中 θ_0 表示干扰方向， $\Delta\theta$ 表示干扰方向邻域形成零陷的宽度。式(8)是天线方向图主瓣指向零度，形成一个零陷的情况。如果是天线方向图主瓣指向 θ_0 时，在旁瓣形成 M 个零陷，那么 Q 表示为如下的形式

$$Q = \sum_{i=1}^M \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} a(\theta, \theta_i) a^H(\theta, \theta_i) d\theta \quad (8)$$

式中 $\{\Delta\theta_i, i=1, 2, \dots, M\}$ 是分别在不同的干扰方向 $\{\theta_i, i=1, 2, \dots, M\}$ 上形成的零陷的宽度。

式(8)代表的是在 M 个方向上零陷的功率积分，通过计算 Q 的特征值分解，可以发现这个矩阵的特征值有这样的性质：

Q 代表约束方向图在 M 个方向上有每个宽度为 $\Delta\theta$ 的零陷, 那么 Q 的特征值中有 M 个比较大的特征值, 相比起这 M 个大特征值, 其它特征值非常小。由于 Q 为 Hermite 矩阵, 因此 Q 的特征值全部为实数, 所以比较它的特征值的并不是每个特征值求模后的比较。

式(9)是 8 阵元阵列在 45° 位置存在一个零陷的约束矩阵的特征值情况:

$$A = \begin{bmatrix} 0.13953 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.1762e-005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.2018e-009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5093e-013 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7193e-018 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4866e-018 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.239e-019 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.3239e-017 \end{bmatrix} \quad (9)$$

可以看出, 第 1 个位置的特征值比其它特征值明显大很多。

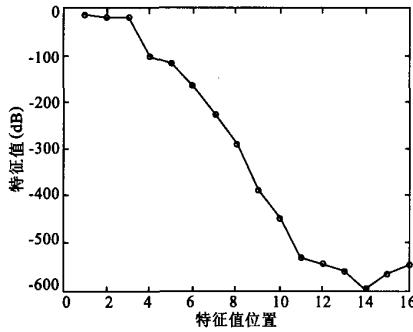


图 1 16 阵元 3 个零陷的特征值情况

图 1 显示了阵元数为 16, 有 3 个零陷时的情况。可以看出具有 3 个比较大的特征值, 另外, 大特征值越多, 它们之间的差别也稍微大一些。

由这个具有比较大的特征值的性质可以考虑到, 并不需要用 Q 的整个特征向量矩阵来进行零陷控制, 应该可以去掉 Q 中属于比较小的特征值的特征向量的影响; 另外一个考虑是, n 阶矩阵理论上最多能控制的零陷为 n 个。

2 单一零陷情况下特征值界的估计

估计特征值界的盖尔斯果林 (Gershgorin) 圆盘定理: 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则它所有特征值都落在复平面上的 n 个圆盘

$$G(A) = \left\{ z \in C : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i=1, \dots, n \right\}, \text{ 则: } ① \lambda(A) \subset \bigcup_{i=1}^n G_i(A);$$

②如果在 $G(A)$ 所示的圆盘中, 有 m 个互相连通, 且与其余的 $n-m$ 个不连通, 则在此 m 个圆盘所成的连通区域中, 恰有 A 的 m 个特征值。

在 4 个阵元, 45° 方向有一个宽度为 1 度的零陷, 主瓣指向 0° 所对应的约束矩阵 Q 中, 由于 $a_{ii}=0.017453, i=1, 2, 3, 4$, 因此这个矩阵的所有盖氏圆盘的中心都重合, 并且 4 个盖氏圆盘的半径为 $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| 0.06979, 0.06980, 0.06980, 0.06979$, 也几乎都相等, 所以这个约束矩阵的所有盖氏圆盘都几乎重合, 并且阵元个数越多各个盖氏圆盘半径的差别越微小。

由盖氏圆盘的定义,

$$|z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (10)$$

$$\therefore |z - z_{ii}| \geq |z| - |a_{ii}| \quad (11)$$

表 1 特征值界的估计

阵元个数	2	3	4	5	6	7	8
矩阵分解	0.034905	0.052356	0.069802	0.087245	0.104680	0.122110	0.139530
定理估计	0.034905	0.052354	0.069797	0.087233	0.104660	0.122073	0.139473

$$\therefore |z| - |a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (12)$$

$$\therefore |z| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| + |a_{ii}| \quad (13)$$

又因为这个矩阵具有对应几个零陷就有几个较大特征值的性质, 并且在单特征值的情况下只有一个比较大的特征值, 所以可以用式(13)来估计这个约束矩阵的最大特征值, 估计的时候可以在式(13)中取等号。表 1 是零陷位于 45° 时分别用矩阵分解方法和用盖氏定理估计得到最大特征值的比较结果, 结果精确到 6 位小数。

3 多个特征值的互相扰动的几何描述

Hermite 阵和酉阵都是正规阵, 它们满足以下条件: $A^H A = A A^H$ 。 A 的奇异值定义为 $s(A) \triangleq [\lambda(A^H A)]^{1/2}$ 。

主奇异值数定义: 设 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ 为矩阵 A 的奇异值, 若存在正整数 σ_i , 使得任意的 $i \geq \sigma_i$ 和 $j < \sigma_i$, 总有 $\sigma_j >> \sigma_i$, 则称 σ_i 为矩阵 A 的主奇异值数。例如, 若矩阵 A 有 k 个非零奇异值, $k < h$, 其余奇异值均为 0, 则矩阵 A 的主奇异值数即为 k 。

主特征值数定义: 设 A 为 $n \times n$ 阶的方阵, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ 是 A 的 n 个特征值, 若存在正整数 σ_i 使得任意的 $i \geq \sigma_i$ 和任意的 $j < \sigma_i$, 总有 $\lambda_j >> \lambda_i$, 则称 σ_i 为矩阵 A 的主特征值数。 Q 的比较大的特征值或奇异值也就是 Q 的主特征值或奇异值, 它们代表 Q 所要表现的主要特征。

Q 是 Hermite 矩阵, 因此存在特征值分解: $Q = U \Lambda U^H$, 此式中对角矩阵 Λ 的对角元素是由矩阵 Q 的特征值 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 构成; 酉阵 U 的各个列为对应特征值的标准正交的特征向量, 于是有: $Q Q^H = U \Lambda U^H (U \Lambda U^H)^H = U \Lambda^2 U^H$, 这正是矩阵 $Q Q^H$ 的特征值分解, 即矩阵 $Q Q^H$ 的特征值为 $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2\}$, 因此由矩阵的奇异值的定义可知, Q 的奇异值为 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$ 。

从几何上看, 矩阵的奇异值反映了矩阵对 n 维空间超球作用后轴的变化, 即奇异值是这个椭球 E 的半轴长度: $E = \{y | y = Ax, \|x\| = 1\}$ 。另一方面, 约束矩阵的定义又可以写成

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^M \int_{-\Delta\theta}^{\theta_i + \Delta\theta} a(\theta, \theta_i) a^H(\theta, \theta_i) d\theta \\ &= \int_{-\Delta\theta}^{\theta_1 + \Delta\theta} a(\theta, \theta_1) a^H(\theta, \theta_1) d\theta \\ &\quad + \int_{-\Delta\theta}^{\theta_2 + \Delta\theta} a(\theta, \theta_2) a^H(\theta, \theta_2) d\theta \\ &\quad + \dots + \int_{-\Delta\theta}^{\theta_M + \Delta\theta} a(\theta, \theta_M) a^H(\theta, \theta_M) d\theta \\ &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_M \end{aligned} \quad (14)$$

因此上面 Q 所对应的椭球 E 中的

$$\begin{aligned} y &= Qx \\ &= (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_M)x \\ &= Q_1 x + Q_2 x + \dots + Q_M x \end{aligned} \quad (15)$$

这个变换过程可以用图 2 在三维空间中来描述。

图 2(a) 中两个椭球对应两个三维的矩阵 Q_1 和 Q_2 , 每个椭球具有一个明显比较长的主轴, 也就是其所对应的矩阵具有一个比较大的奇异值;

(下转第 2481 页)

5 结 论

该系统将平时物资流通工作中需要进行计算、统计、分析、检索的数据统一制表、登账、填证、建卡存储起来，加工成各种形式的报表、文档、图形卡片、曲线等直观信息以供物资计划部门检索查询。并为物资管理工作制定出较为符合实际情况的，真正具有指导意义的中(短)期供应计划，提供了一种快速准确的科学工具。该系统在本地电信系统已应用两年，不但明晰了管理，节约了人力、物力和资金，提高了工作效率，还收到了很大的社会效益。

参考文献：

- [1] 张海藩. 软件工程导论[M].北京:清华大学出版社, 2001.

(上接第 2444 页)

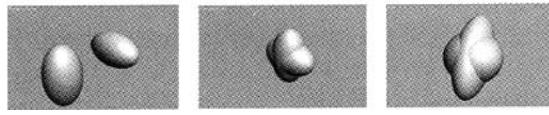


图 2 三维椭球相加

图 2(b)表示两个矩阵所代表的椭球相加的过程，这里人为地把相加过程分成两步：第 1 步是把两个椭球的中心重合，可以假定重合的中心位于空间原点；第 2 步，因为 $\|x\|=1$ 代表所有方向上的范数为 1 的点组成的球面，所以相加是在空间中每个方向上将两个椭球的上对应此方向的两个点到原点的距离进行相加，得到新的不规则球面在这个方向上对应此方向的点到原点的距离；图 2(c)表示得到的新的不规则球面，这个球面在两个方向上具有比较长的主轴，因此具有两个比较大的奇异值，并且这两个奇异值与原先每个椭球对应的奇异值相比，都受到了另外 1 个椭球所对应的奇异值的扰动。

4 结 论

本文应用盖氏圆盘定理比较精确地估计 1 个零陷情况下约束矩阵特征值的界。另外，从数学方面，描述了多个零陷情

- [2] [美]David Lockman. 轻松掌握 ORACLE8 数据库开发[M]. 北京:电子工业出版社, 2000.
- [3] 何田. PowerBuilder8.0 程序员参考手册[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2002 .
- [4] 刘云洲,于德壹. PowerBuilder 8.0 数据窗口实用编程技术[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2001.
- [5] Hannibal. 编程爱好者[EB/OL]. <http://www.programfan.com/article.asp?classid=6>.
- [6] 赛迪集团. 赛迪网技术天地 [EB/OL]. <http://tech.ccidnet.com/pub/column/c1107.html>.
- [7] 李玉东. PowerBuilder8.0 对象与控件大全[M]. 北京:电子工业出版社, 2002.

况下，每个对应 1 个零陷的约束矩阵的特征值之间的相互影响，也就是每个约束矩阵所对应的椭球的长轴在约束矩阵相加时的相互影响。

参考文献：

- [1] HAN Ji-xian, ZHAO Shu-qing. Linear array pattern synthesis with multiple prescribed broad Nulls[J]. Proc of ICCEA, 1999 (10): 160-163.
- [2] 张晓明. 多个矩阵之和与积的特征值关系问题[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2002,38(6):734-738.
- [3] 吕炯兴. 正规矩阵的任意扰动[J]. 高等学校计算数学学报, 2000 (3):85-89.
- [4] Lal C Godara. Applications of antenna arrays to mobile communications, part I: Performance improvement, feasibility, and system considerations[J]. Proceedings of the IEEE, 1997,85(7): 1031-1060.
- [5] 张洪渊, 贾鹏, 史习智. 确定盲分离中未知信号源个数的奇异值分解法[J]. 上海交通大学学报, 2001,35(8):1155-1158.
- [6] (法)沙特琳. 线性算子的谱逼近 [M]. 天津:天津大学出版社, 1987.

(上接第 2475 页)

5 结 论

IKE 协议正广泛应用于 VPN 虚拟专网的构建中，因此，研究它有非常重要的现实意义。虽然在 VPN 设备中使用 IKE 的厂商已证明它是安全的，但是安全专家认为它过于复杂，以至于难以证明它是安全的。它的发展趋势目前有两个方向：JFK (Just Fast Keying) 和 IKEv2。

JFK 协议避免了 IKE 复杂的两个阶段结构，使用了更少的消息往返次数。IKEv2 是 IKE 协议的继续，IETF 工作组将在今年 12 月份发布它的最新版本。总之，IKE 协议还有待于进一步的发展。

参考文献：

- [1] Maughham D, Schertler M. Internet security association and key

management protocol (ISAKMP)[S]. RFC 2408,1998-11.

- [2] Harkins D, Carrel D. The internet key exchange (IKE)[S]. RFC 2409, 1998-11.
- [3] 秦磊华,余胜生. IPSec 密钥交换(IKE)协议的分析与改进[J]. 计算机工程, 2002, 28(3): 130-131.
- [4] 于佳,李大兴. 对于 IKE 的分析及改进[J]. 计算机工程, 2003,29 (1):158-160.
- [5] 张勇,敖青云,白英彩,等. Internet 密钥交换协议安全性分析[J]. 计算机工程与应用, 2001, 37(3):1-3.
- [6] 袁鑫,何大可. IKE 协议的安全性分析[J]. 通信技术, 2003,11: 103-105.
- [7] 陈忠良. IKE 协议的安全性问题[J]. 浙江大学学报(工学版), 2002,36(3):306-309.

如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训(www.edatop.com)专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



关于易迪拓培训:

易迪拓培训(www.edatop.com)由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网(www.mweda.com)，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>