

# 基于逆QRD-RLS算法的自适应天线阵结构设计

周妮<sup>1</sup> 陈龙<sup>2</sup>

(1. 怀化学院物理与信息工程系 湖南怀化 418000; 2. 国防科技大学 湖南长沙 410000)

**摘要:**阐述两种基于逆QR分解的RLS,并对两种算法进行了总结。新算法可以同步更新自相关平方根矩阵和自相关平方根矩阵,因此较传统算法权值提取更容易。采用 systolic阵对两种算法进行硬件设计,分析表明第二种方法较传统的逆QRD-RLS算法实现复杂度更低,工作频率更高。

**关键词:**逆QR分解 RLS 脉动阵列 自适应天线阵

中国分类号:TN851

文献标识码:A

文章编号:1674-098X(2010)11(c)-0026-02

**Abstract:** This paper presents two kinds of inverse QR decomposition-based recursive least square (RLS) and sums up the achievement of these two algorithms. The novel algorithm extract weight easier than the traditional one, for which can update the square-root correlation matrix and the inverse square-root correlation matrix synchronously. Using systolic array algorithm for the two types of hardware design, the analysis shows that the second method, compared with the traditional IQRD-RLS algorithm, has lower complexity and higher operating frequency.

**Key word:** inverse QR decomposition, RLS, systolic array, adaptive antennas

LMS类算法和RLS类算法是自适应滤波中的两大重要算法。LMS类算法简单,易于实现,但该类算法的特征值发散严重影响了算法的收敛速度。RLS类算法基本不受信号特征值发散影响,其收敛速度比LMS类算法快一个数量级,但RLS算法的数值稳定性差、计算量大、难于并行实现。采用基于Givens旋转的QR分解的方式来实现RLS算法,有效的解决了上述问题,因而在实践中得到广泛应用。逆QRD-RLS算法是RLS类算法中的一种,该算法可以看成是Kalman平方根协方差滤波器的特例。IQRD-RLS算法很好的解决了RLS算法迭代稳健性的问题和QRD-RLS算法中权值提取复杂的问题,并且可以通过脉动阵列(Systolic Array)来采用硬件并行实现,是一种很贴近实用要求的算法。基于此,文章给出了两种IQRD-RLS算法,并以4元天线阵为例给出了相对应的硬件结构。分析表明新算法较传统算法权值提取简单,硬件规模小,工作频率高。

## 1 传统IQRD-RLS算法与结构

本节介绍逆QRD-RLS的第一个版本算法,该算法是由Alexander和Ghoshkar两位学者在1993年提出的,其主要目的是解决QRD-RLS中的回代硬件复杂度大和最佳权值无法直接提取的问题。1.1小节对算法进行推导,并给出算法实现的具体步骤;1.2

表1

步骤1: 初始化, $n=0$ 时, $\Phi^{1/2}(n)=\delta^{1/2}E$ , $\hat{w}(n)=0$	
步骤2: 更新 $n=n+1$	
$\begin{bmatrix} \lambda^{1/2}\Phi^{1/2}(n-1) & \lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n-1)\mathbf{u}^H(n) \\ \mathbf{0}_M & 1 \end{bmatrix} \Theta(n) = \begin{bmatrix} \Phi^{1/2}(n) & \mathbf{0}_M \\ \mathbf{p}(n) & \mu \end{bmatrix}$	(5)
卡尔曼增益: $k(n)=\mathbf{p}(n)/\mu$	(6)
先验预测误差: $\xi(n)=d(n)-\hat{w}(n-1)\mathbf{u}(n)$	(7)
权值更新: $\hat{w}(n)=\hat{w}(n-1)+k(n)\xi(n)$	(8)
所给参数:	
数据矩阵: $\mathbf{A}^H(n)=[\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(n)]$ , 刺激响应: $\mathbf{d}^H(n)=[d(1), d(2), \dots, d(n)]$	
加权因子: $\lambda$ , 对角参数: $\delta$	

表2

步骤1: 初始化, $n=0$ 时, $\Phi^{1/2}(n)=\delta^{1/2}E$ , $\Phi(n)=\delta^{1/2}E$	
$\mathbf{w}(n)=0$ , $\mathbf{p}(n)=\mathbf{0}_M$ , $f=1$	
步骤2: 更新 $n=n+1$	
$\begin{bmatrix} \lambda^{1/2}\Phi^{1/2}(n-1) & \mathbf{0}_M & \mathbf{u}(n) \\ \lambda^{1/2}\mathbf{p}^H(n-1) & f & d(n) \\ \lambda^{1/2}\Phi^{-1/2}(n-1) & \mathbf{0}_M & -\mathbf{w}(n-1)/f \\ -\mathbf{w}(n-1)/f & 1/f & 0 \end{bmatrix} \Theta(n) = \begin{bmatrix} \lambda^{1/2}\Phi^{1/2}(n) & \mathbf{0}_M & \mathbf{0}_M \\ \lambda^{1/2}\mathbf{p}^H(n) & f' & 0 \\ \lambda^{1/2}\Phi^{-1/2}(n) & \mathbf{0}_M & -\mathbf{w}(n)/f' \\ -\mathbf{w}(n)/f' & 1/f' & \mathbf{v}^H(n) \end{bmatrix}$	(16)
后验预测误差: $c(n)=d(n)-\mathbf{w}(n)\mathbf{u}(n)$	(17)
权值提取: $\mathbf{w}(n)=-1 \times \frac{-\mathbf{w}(n)/f'}{1/f'}$	(18)
所给参数:	
数据矩阵: $\mathbf{A}^H(n)=[\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(n)]$ , 刺激响应: $\mathbf{d}^H(n)=[d(1), d(2), \dots, d(n)]$	
加权因子: $\lambda$ , 对角参数: $\delta$	

节根据1.1节的算法步骤,采用systolic阵对算法进行实现,并给出具体的实现方案。

### 1.1 第一种算法

RLS滤波器的核心思想是求出一组最佳权值,使得代价函数  $J(n)$  取最小值。代价函数  $J(n)$  定义为

$$J(n) = \| \mathbf{A}^{1/2}(n)(\mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n)) \|^2$$
 (1)

其中  $\mathbf{A}(n)$  是  $M \times M$  维加权矩阵  $\mathbf{A}(n) = \text{diag}[\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, 1]$ ,  $\lambda$  是小于1的遗忘因子;  $\mathbf{d}(n)$  为n时刻的期望信号,  $\mathbf{A}(n)$  为输入的数据矩阵,  $\mathbf{A}(n) = [\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(n)]$ ,  $\mathbf{w}(n)$  是n时刻的权值列矢量。

由Riccati方程,推出  $\Phi^{-1}(n)$  的递推方程

$$\Phi^{-1}(n) = \Phi^{-1}(n-1) - \lambda^{-2}\Phi^{-1}(n-1)\mathbf{u}(n)\mathbf{r}^{-1}(n)\mathbf{u}^H(n)\Phi^{-1}(n-1)$$
 (2)

其中  $\Phi^{-1}(n)$  为时间平均相关矩阵  $\Phi(n)$  的逆矩阵,  $\Phi(n)$  定义为  $\Phi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i)\mathbf{u}^H(i)$ ,  $\mathbf{r}^{-1}(n)$  为滤波估计的协方差矩阵,定义为  $\mathbf{r}(n) = \lambda^{-1}\mathbf{u}^H(n)\Phi^{-1}(n-1)\mathbf{u}(n) + 1$

提取式(1.2)写成的关键元素并兼顾矩阵的兼容性,构造新的复合矩阵,

$$\mathbf{K}(n) = \begin{bmatrix} \lambda^{-1}\Phi^{-1}(n-1) & \lambda^{-1/2}\Phi^{-1}(n-1)\mathbf{u}(n) \\ \lambda^{-1/2}\mathbf{u}^H(n)\Phi^{-1}(n-1) & \mathbf{u}^H(n)\Phi^{-1}(n-1)\mathbf{u}(n) + 1 \end{bmatrix}$$
 (3)

因  $\mathbf{K}(n)$  精度有限,导致  $\mathbf{K}(n)$  数值特性不稳定,故利用Givens旋转(1.3)进行对上式进行Cholesky分解

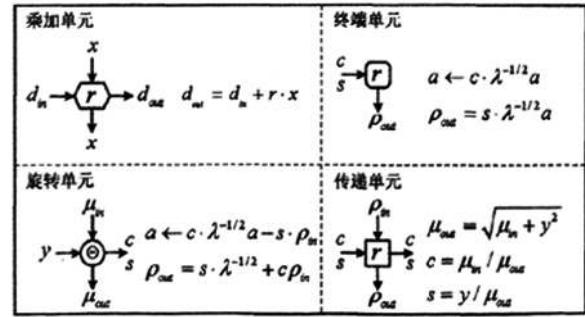
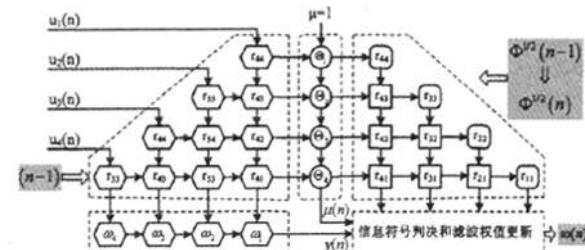


图1

## 技术创新

$$\begin{bmatrix} \lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n-1) & \lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n-1)\mathbf{u}^H(n) \\ \mathbf{0}_M & 1 \end{bmatrix} \Theta(n) = \begin{bmatrix} \Phi^{-1/2}(n-1) & \mathbf{0}_M \\ \mathbf{k}(n)r^{1/2}(n) & r^{1/2}(n) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{k}(n)$  为卡尔曼增益。现总结传统逆QRD-RLS算法如下：

算法1小结(如表1)：

## 1.2 传统算法的实现结构

本部分采用 systolic 阵的方式以运用算法1实现4元天线阵的波束成型器, 实现方式如图1所示。其中左边的三角单元对应(5)中  $\lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n-1)$ , 作用是对输入向量  $\mathbf{u}(n)$  进行预处理。中间的由圆圈组成的方框是矩阵的旋转单元, 其产生的旋转参数为后续一系列的 Givens 旋转做好准备。右边的三角单元对应(5)中的  $\Phi^{-1/2}(n)$ , 这个单元接收从左边旋转单元的旋转参数, 在时钟的精确控制下, 进行 QR 分解运算。右下方方框是线性运算部分, 主要实现式(6), (7), (8), 用于提取新的权值。在更新完毕后, 右边三角单元要将所有元素传到左边三角单元所对应的位置, 以便对下一快拍数据进行预处理。

## 2 一种新的IQRS-RLS算法与结构

本节介绍 IQRS-RLS 的第二个版本的算法, 该算法由 Jun Ma 和 Keshab K. Parhi 两位学者共同提出, 其优点在于不用对输入数据进行预处理, 而直接通过  $\Phi^{-1/2}(n)$  迭代出最优权值。为使算法与对应硬件实现更明确, 文中对原始算法中的迭代公式中的各元素位置进行了调整。2.1 节介绍算法的推导过程, 并对算法进行总结。2.2 节针对前一小节提出的算法, 给出明确的硬件结构。

## 2.1 第二种 IQRS-RLS 算法

利用  $\lambda^{1/2}\Phi^{1/2}(n)$  和  $\lambda^{1/2}\mathbf{p}^H(n)$  构造新的  $(M+1) \times (M+1)$  维复合下三角矩阵  $\tilde{\Phi}^{1/2}(n)$ ,

$$\tilde{\Phi}^{1/2}(n) = \begin{bmatrix} \lambda^{1/2}\Phi^{1/2}(n) & \mathbf{0}_M \\ \lambda^{1/2}\mathbf{p}^H(n) & f \end{bmatrix} \quad (9)$$

利用矩阵求逆引理对  $\tilde{\Phi}^{1/2}(n)$  求逆, 有

$$\tilde{\Phi}^{-1/2}(n) = \begin{bmatrix} \lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n) & \mathbf{0}_M \\ -\mathbf{p}^H(n)\Phi^{-1/2}(n)/f & 1/f \end{bmatrix} \quad (10)$$

利用式(2.2)对  $\tilde{\Phi}^{1/2}(n)$  中的  $-\mathbf{p}^H(n)\Phi^{-1/2}(n)/f$  进行变换, 得

$$\tilde{\Phi}^{-1/2}(n) = \begin{bmatrix} \lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n) & \mathbf{0}_M \\ -\hat{\mathbf{w}}(n)/f & 1/f \end{bmatrix} \quad (11)$$

将  $\tilde{\Phi}^{1/2}(n)$  和  $\tilde{\Phi}^{-1/2}(n)$  进行排列, 组成新的  $(2M+2) \times (M+1)$  维矩

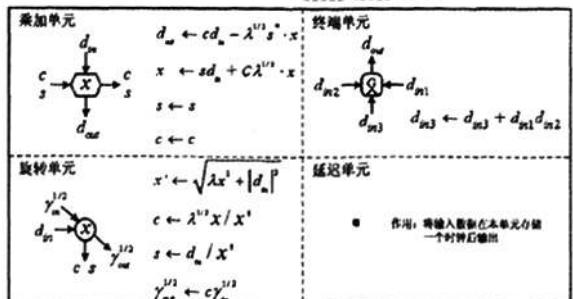
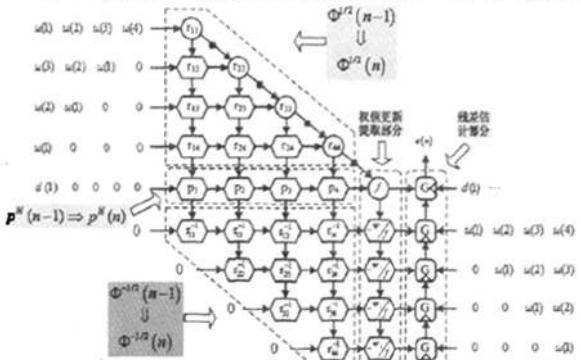


图2

阵  $\mathbf{R}(n-1)$ ,

$$\mathbf{R}(n-1) = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^{1/2}(n-1) & \tilde{\mathbf{u}}(n) \\ \tilde{\Phi}^{-1/2}(n-1) & \mathbf{v}(n) \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中  $\tilde{\mathbf{u}}(n)$  为  $n$  时刻输入数据向量  $\mathbf{u}(n)$  和期望信号  $d(n)$  组成的列向量  $\tilde{\mathbf{u}}(n) = [\mathbf{u}(n) \ d(n)]$

利用 Givens 旋转对  $\mathbf{R}(n-1)$  进行更新, 即

$$\mathbf{R}(n-1)\Theta(n) = \mathbf{R}(n) \quad (13)$$

将(13)展开得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^{1/2}(n-1) & \tilde{\mathbf{u}}(n) \\ \tilde{\Phi}^{-1/2}(n-1) & \mathbf{v}(n) \end{bmatrix} \Theta(n) = \begin{bmatrix} \Phi^{1/2}(n) & \mathbf{0}_{M+1} \\ \tilde{\Phi}^{-1/2}(n) & \mathbf{v}'(n) \end{bmatrix} \quad (14)$$

为得到清晰的实现结构, 再次对(2.6)中的  $\tilde{\Phi}^{1/2}(n-1)$ 、 $\tilde{\Phi}^{-1/2}(n-1)$ 、 $\tilde{\Phi}^{1/2}(n)$  和  $\tilde{\Phi}^{-1/2}(n)$  分别进行展开, 得

$$\begin{bmatrix} \lambda^{1/2}\Phi^{1/2}(n-1) & \mathbf{0}_M & \mathbf{u}(n) \\ \lambda^{1/2}\mathbf{p}^H(n-1) & f & d(n) \\ \lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n-1) & 0 & \mathbf{0}_M \\ -\mathbf{w}(n-1)/f & 1/f & 0 \end{bmatrix} \Theta(n) = \begin{bmatrix} \lambda^{1/2}\Phi^{1/2}(n) & \mathbf{0}_M & \mathbf{0}_M \\ \lambda^{1/2}\mathbf{p}^H(n) & f' & 0 \\ \lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n) & \mathbf{0}_M & \mathbf{v}'(n) \\ -\mathbf{w}(n)/f' & 1/f' & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中  $\mathbf{v}'(n)$  是我们不用关心的列向量。

算法2小结(如表2)：

## 2.2 第二种算法的实现结构

本部分用算法2实现4元天线阵的波束成型器。上三角单元与式(16)中的  $\lambda^{1/2}\Phi^{1/2}(n)$ , 用于对矩阵  $\Phi^{1/2}(n)$  进行更新, 其右边的圆圈产生旋转所需参数并存储下旋转后该位置对应的值。下三角单元与式(2.8)中的  $\lambda^{-1/2}\Phi^{-1/2}(n)$  对应, 并对前一时刻的  $\Phi^{-1/2}(n-1)$  进行更新。权值更新部分只需用  $f'$  与  $-\mathbf{w}(n)/f'$  相乘即可, 不用进行除法运算。最右边的方框主要用于对残差进行估计。由于旋转参数沿列的方向向下传播会出现一个时钟的延迟, 故输入向量要斜序进入。

## 3 两种算法的性能比较

若自适应滤波器的阶数为  $M$ , 则两种硬件运算量复杂度都是  $M^2$  级。但算法1硬件结构中的线性单元运算要同时完成三个公式的运算, 而算法2仅需一个乘法即可实现更新权值的提取, 可见算法2实现难度和硬件资源要比算法1小, 权值提取更容易。同时, 算法1在每次权值更新后都需要将  $\Phi^{-1/2}(n)$  的值传给预处理单元, 再对输入数据进行预处理。算法2不需要这样的处理, 矩阵  $\Phi^{1/2}(n)$  和  $\Phi^{-1/2}(n)$  是顺序更新的, 只要把输入传给  $\Phi^{1/2}(n)$ , 数据就会在阵列里依次更新, 省去了  $\Phi^{1/2}(n)$  回馈预处理单元的过程, 因此算法2更易实现流水, 对应的工作频率会高于算法1。

## 4 结语

本文给出了两种逆QR-RLS算法, 新方法较传统方法权值提取更加简单, 降低了硬件实现的复杂性, 提高了工作频率。但本算法中依然存在开平方运算和除法运算, 这两种运算在硬件实现中大量耗费硬件资源。鉴于此, 下一步应该将无平方根、无除法算法与本算法结合起来, 使得算法实现更容易、消耗资源更少。

## 参考文献

- [1] Simon Haykin, Adaptive Filter Theory, 4th ed, Prentice Hall, pp513~533
- [2] J.G. McWhirter, Recursive least-squares minimization using a systolic array, Real-Time Signal Processing VI, vol.1152
- [3] 卢树军. 中频数字化扩频接收机自适应抗干扰技术研究, pp53~56
- [4] T.J. Shepherd, J.G. McWhirter, J.E. Hudson, Parallel weight extraction from a systolic adaptive beamformer. Mathematics in Signal Process II(J.G. McWhirter ed.)pp775~790
- [5] José Antonio Apolinário Jr., QRD-RLS Adaptive Filtering, Springer, pp288~291

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…

---



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

---

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com))，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>