

中图分类号:TN820.13

文献标志码:A

文章编号:1674-2230(2010)04-0064-05

# 基于半定规划的阵列天线方向图旁瓣抑制

李智,熊健

(电子信息控制重点实验室,成都 610036)

**摘要:**基于半定规划理论提出了一种新的阵列天线方向图旁瓣抑制算法。与传统旁瓣抑制方法不同,该方法通过合理设计优化准则,避免了在凸优化问题建模过程中引入近似,保证了波束形成器的最优性;并且使得在压低旁瓣的同时,可准确控制信噪比增益和主瓣宽度到期望的范围之内。该方法对阵列流形没有限制,计算机仿真结果验证了其有效性。

**关键词:**阵列天线方向图;旁瓣抑制;凸优化;半定规划

## Sidelobe Suppression of Antenna Array Pattern Based on Semidefinite Program

LI Zhi, XIONG Jian

(Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China)

**Abstract:** A new method of sidelobe suppression of antenna array pattern based on semidefinite program (SDP) is proposed. Unlike the conventional methods, the proposed method has avoided approximation in the process of converting the practical problem to the convex problem via reasonable design of optimization criterion, thus the optimality of the beamformer could be guaranteed. Moreover, the proposed method is able to control the main beamwidth and the signal to noise ratio (SNR) gain exactly in the expected range while suppressing the sidelobes. The proposed method is without any limit for array geometry, and the computer simulation results verify its efficiency.

**Key words:** antenna array pattern; side-lobe suppression; convex optimization; semi-definite program

## 1 引言

基于阵列天线的数字波束形成技术目前已广泛应用于雷达、声呐、无线通信等多个领域。现代战场电磁信号环境日益复杂,为抑制旁瓣干扰,实现高精度、高分辨侦察测向,要求阵列天线方向图具有低旁瓣。因此,如何优化波束形成器进行旁瓣抑制成为重要课题。

近几年提出的旁瓣抑制方法主要有两类:一类是基于凸优化理论,如二阶锥规划、半定规划等<sup>[1-4]</sup>。由于凸优化问题可以利用内点法<sup>[2]</sup>快速求得全局最优解,因此这类算法有收敛速度快,效率高等优点。但传统算法在凸优化问题建模过

程中引入了近似,影响了波束形成器的最优性<sup>[3]</sup>,且不能对主瓣宽度、信噪比增益等进行灵活控制;另一类旁瓣抑制方法是基于人工智能算法,如遗传算法等<sup>[5,6]</sup>。这类算法建模过程简单,但是有容易陷入局部最优解,收敛速度慢等缺点。

旁瓣抑制往往是以损失信噪比增益和展宽主瓣宽度为代价的。因此在抑制旁瓣的同时必须保证信噪比增益下降程度和主瓣展宽程度都在用户要求的范围内。为解决上述问题,本文提出了一种新的基于凸优化的旁瓣抑制算法。通过合理设计优化准则,综合考虑了用户对旁瓣电平,信噪比增益和主瓣宽度的要求,将旁瓣抑制问题无近似

转化为了一个半定规划问题。既保证了波束形成器的最优性,又使得在抑制旁瓣的同时,可以直接根据用户要求,灵活、准确地将信噪比增益和主瓣宽度控制在期望的范围内。

## 2 问题描述

考虑一任意几何结构的  $N$  元天线阵列,假设信号源与阵列位于同一平面,其阵列流形可表示为  $A(\theta)$ 。其中,  $\theta$  表示方位角,数字波束形成过程可由式(1)表示:

$$F(\theta) = \omega^H A(\theta) \quad (1)$$

其中,  $\omega$  为复加权矢量,也称为波束形成器;  $(\cdot)^H$  表示矩阵共轭转置;  $F(\theta)$  的幅度图称为阵列天线方向图。通过调整  $\omega$  可以调整方向图主瓣指向,从而在期望方向获取信噪比增益。

假设期望方向为  $\theta_0$ ,则常规波束形成器  $\omega_u = A(\theta_0)$  可使方向图主瓣指向  $\theta_0$  方向,并在该方向获得  $N$  倍的信噪比增益。但是,常规波束形成器的方向图往往有旁瓣过高的缺点。以均匀圆阵为例,  $N$  个阵元,半径为  $R$  的均匀圆阵阵列流形可表示为:

$$A(\theta) = [\exp(j2\pi\beta\cos(\theta - \theta_1)), \dots, \exp(j2\pi\beta\cos(\theta - \theta_N))]^T \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  表示信号波长,  $\beta = R/\lambda$ ,  $\theta_n = (n-1)2\pi/N$ 。当  $N = 9$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\theta_0 = 180^\circ$  时,采用常规波束形成器的 9 元均匀圆阵阵因子方向图如图 1 所示。可以看出这时方向图的最高旁瓣为  $-8\text{dB}$  左右,这样的旁瓣过高,必须加以抑制。而旁瓣抑制可以通过设计合理的优化准则对波束形成器  $\omega$  进行优化来实现。

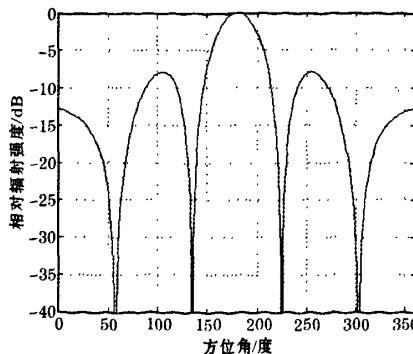


图 1 常规波束形成时 9 元均匀圆阵阵因子方向图 ( $\beta = 0.5$ )

## 3 基于半定规划的旁瓣抑制算法

### 3.1 优化准则设计

传统优化准则通常会设置一期望主瓣方向图  $|F_d(\theta)|$ , 用于在压低旁瓣的同时控制实际主瓣方向图  $|F(\theta)|$  与  $|F_d(\theta)|$  接近<sup>[3]</sup>。但由此得到的是一个非凸优化问题,不易求解,只能近似转化为凸优化问题求解,而这种近似可能降低波束形成器的最优性。因此,合理的优化准则应尽量避免从实际问题到凸优化问题转化过程中引入近似。如果对主瓣形状没有复杂要求,则不需要设置期望方向图,而直接对主瓣宽度和信噪比增益进行约束。优化准则中涉及的参数最好能直接根据用户的需求设定。

假设波束最大值指向  $\theta_0$  方向,则对于从  $\theta_0$  方向入射的信号  $s$ ,考虑功率为  $\sigma^2$  的噪声  $n$ ,则阵列接收矢量可表示为:

$$x = A(\theta_0)s + n \quad (3)$$

定义输入信噪比为:

$$SNR_{in} = \frac{E\{s^2\}}{E\{n^2\}} = \frac{P_s}{\sigma^2} \quad (4)$$

加权后的输出信噪比定义为:

$$SNR_{out} = \frac{E\{|\omega^H A(\theta_0)s|^2\}}{E\{|\omega^H n|^2\}} = \frac{|\omega^H A(\theta_0)|^2}{\|\omega\|^2} SNR_{in} \quad (5)$$

加权后的信噪比增益定义为:

$$SNR_{imp} = \frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = \frac{|\omega^H A(\theta_0)|^2}{\|\omega\|^2} \quad (6)$$

已有文献证明<sup>[7]</sup>,当各阵元接收到的噪声都是白噪声时,只有常规波束形成器才能在期望方向获得最大的信噪比增益( $N$  倍)。因此旁瓣抑制势必造成信噪比增益的下降。而旁瓣区域能量的减少,必然造成主瓣区域能量的增加,因此,旁瓣抑制也会引起主瓣展宽。这就要求抑制旁瓣的同时应兼顾用户对信噪比增益和主瓣宽度的要求。

根据上述分析,我们设计了如下的波束形成器优化准则:

$$\min_{\omega} \max_i |A(\theta_i)^H \omega|, \theta_i \in \Theta_{side}, i = 1, 2, \dots, M$$

$$\text{subject to } |A(\theta_0)^H \omega| = 1,$$

$$\begin{aligned} |A(\theta_L)^H \omega| &\leq \mu, \\ |A(\theta_R)^H \omega| &\leq \mu, \\ \|\omega\| &\leq \eta \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\Theta_{side}$  表示需要抑制的旁瓣区域;  $\theta_i, i = 1, 2, \dots, M$  表示旁瓣区域内的离散方位角;  $\theta_0$  为期望主瓣指向; 约束条件  $|A(\theta_0)^H \omega| = 1$  表示归一化后的主瓣响应;  $\eta$  为一大于 0 的常数; 约束条件  $\|\omega\| \leq \eta$  可以灵活控制旁瓣抑制后的信噪比增益。例如, 为控制旁瓣抑制后的信噪比增益相对于常规波束形成时下降量小于等于  $r$  dB, 只需令:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{N} 10^{(-r/20)}} \quad (8)$$

就可保证旁瓣抑制后的信噪比增益满足:

$$SNR_{imp} = \frac{\|\omega^H A(\theta_0)\|^2}{\|\omega\|^2} \geq 10\lg N - r \text{ (dB)} \quad (9)$$

$\theta_L, \theta_R$  分别表示主瓣左右半功率点;  $\mu$  为一大于 0 的常数, 且  $\mu = 10^{(-3/20)}$ ; 约束条件  $|A(\theta_L)^H \omega| \leq \mu$  和  $|A(\theta_R)^H \omega| \leq \mu$  可以控制主瓣半功率点 ( $-3$  dB) 宽度小于等于  $2|\theta_L - \theta_0|$  (或  $2|\theta_R - \theta_0|$ )。因此, 优化问题(7)是在约束信噪比增益大于等于  $1/\eta^2$ , 且主瓣半功率点宽度小于等于  $2|\theta_L - \theta_0|$  (或  $2|\theta_R - \theta_0|$ ) 的条件下, 优化波束形成器  $\omega$  使得最高旁瓣电平极小。

### 3.2 半定规划问题转化

半定规划问题是半正定矩阵线性不等式约束凸优化问题。半定规划问题的标准形式为:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } c^T x \\ &\text{subject to } F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n \geq 0, \\ &Ax = b \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  为待优化的向量,  $F_0, F_1, \dots, F_n$  是同阶半正定矩阵。

目前利用高效的内点算法<sup>[2]</sup>可以快速寻找到半定规划问题的全局最优解。因此, 下面设法将优化问题(7)无近似转化为一半定规划问题。由于问题(7)的约束条件  $|A(\theta_0)^H \omega| = 1$  是非凸的, 它还是一个凸优化问题。考虑到将  $\omega$  乘以任意一个模为 1 的复数都不改变(7)式中目标函数的值, 因此该约束条件可等价写成  $A(\theta_0)^H \omega = 1$ 。引入非负实变量  $\epsilon$ , 优化问题(7)可以无近似转化为一半定规划问题, 如(11)式所示。令  $x =$

$[\epsilon \ \omega^T]^T$ , 以  $x$  为待优化向量, 容易将(11)式写成(10)式所示的半定规划问题标准形式, 进而利用高效的内点算法求解。目前针对内点算法已开发出了专业的计算软件, 如 SeDuMi<sup>[8]</sup>、YALMIP<sup>[9]</sup>等。

已有文献证明<sup>[2]</sup>, 内点算法的计算复杂度为  $O(\sqrt{L})$ ,  $L$  表示优化准则约束条件中不等式的个数。这说明本文提出的算法, 其计算复杂度主要与旁瓣区域内的离散方位角个数  $M$  有关, 而阵元个数的增加对该算法复杂度的影响不大。因此, 本文提出的算法, 其复杂度可以通过调整角度采样间隔来控制, 且适用于大规模阵列。在收敛速度方面, 内点算法也具有很大优势。对于  $M \leq 1000$  的情况, 其迭代步数都在 50 步以内。而遗传算法在解决同类问题时的迭代步数一般为 600 ~ 1000 步<sup>[6]</sup>, 而且其参数选择往往需要靠经验以及多次尝试得到<sup>[5]</sup>。

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \epsilon \\ &\text{subject to } A(\theta_0)^H \omega = 1, \\ &\left[ \begin{array}{cc} \eta I & \omega \\ \omega^H & \eta \end{array} \right] \geq 0, I \text{ 为单位阵}, \\ &\left[ \begin{array}{cc} \mu & A(\theta_L)^H \omega \\ \omega^H A(\theta_L) & \mu \end{array} \right] \geq 0, \\ &\left[ \begin{array}{cc} \mu & A(\theta_R)^H \omega \\ \omega^H A(\theta_R) & \mu \end{array} \right] \geq 0, \\ &\left[ \begin{array}{cc} \epsilon & A(\theta_i)^H \omega \\ \omega^H A(\theta_i) & \epsilon \end{array} \right] \geq 0, i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (11)$$

### 4 仿真结果与分析

本节我们将以均匀圆阵为例, 通过计算机仿真验证本文提出的旁瓣抑制算法的有效性。

仿真一: 固定阵元数和  $\beta$  ( $\beta = R/\lambda$ ) 取值情况下的旁瓣抑制性能仿真。采用一 9 元均匀圆阵, 取  $\beta = 0.5$ 。首先在主瓣指向  $\theta_0 = 180^\circ$  的情况下, 将本文提出的旁瓣抑制算法性能与文献[3]中的传统算法性能进行了比较。约束信噪比增益下降小于等于 2 dB, 半功率点主瓣宽度展宽小于等于  $2^\circ$ , 仿真结果如图 2 所示。其中, 横坐标表示离散方位角  $0^\circ \sim 360^\circ$ , 采样间隔为  $1^\circ$ ; 虚线表示旁瓣抑制前, 常规波束形成时的阵列天线方向图; 实线和点划线分

别表示采用本文提出的旁瓣抑制算法和文献[3]的算法进行旁瓣抑制后的阵列天线方向图。各阵元加权幅值和相位如表 1 和表 2 所示。仿真结果表明,常规波束形成时的最高旁瓣为 -8dB;采用本文提出的方法进行旁瓣抑制后,最高旁瓣已被压低至 -23dB 以下,半功率点主瓣宽度展宽 2°,信噪比增益下降 1.3dB;而文献[3]的方法同等条件下只能将最高旁瓣压低至 -19dB 左右。可见本文提出的旁瓣抑制算法性能优于文献[3]的方法,且在有效压低旁瓣的同时,还能将信噪比增益和主瓣宽度准确控制在期望的范围之内。

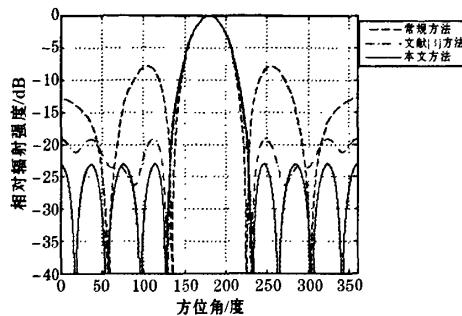


图 2 不同方法旁瓣抑制性能比较

表 1 不同方法的各阵元加权幅值

阵元号	常规方法	文献[3]方法	本文方法
1	0.3333	0.2426	0.1906
2	0.3333	0.4299	0.4609
3	0.3333	0.2212	0.2131
4	0.3333	0.3892	0.3740
5	0.3333	0.2921	0.2899
6	0.3333	0.2921	0.2899
7	0.3333	0.3892	0.3740
8	0.3333	0.2212	0.2131
9	0.3333	0.4299	0.4609
旁瓣/dB	-8	-19.1	-23

表 2 不同方法的各阵元加权相位/度

阵元号	常规方法	文献[3]方法	本文方法
1	180	38	-117
2	-138	30.5	-145
3	-31	125	-46
4	90	-63.5	118.5
5	169	-25	137.5
6	169	-25	137.5
7	90	-63.5	118.5
8	-31	125	-46
9	-138	30.5	-145

然后我们分别对波束最大值指向为 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300° 时的旁瓣抑制性能进行了仿真。旁瓣抑制前后的极坐标方向图分别如图 3 (a) 和 (b) 所示。仿真结果表明本文提出的旁瓣抑制算法对不同主瓣指向情况都有效。

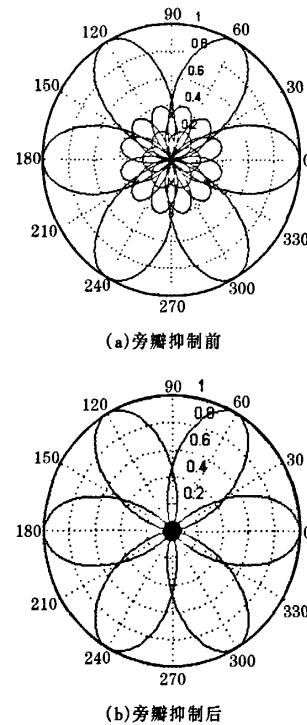


图 3 旁瓣抑制前后形成 6 个波束的极坐标方向图比较

仿真二: 不同阵元数和  $\beta$  取值情况下的旁瓣抑制性能仿真。该实验中, 我们分别在  $\beta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1$  时, 阵元数  $N = 7, 8, \dots, 18$  变化情况下, 对本文提出的旁瓣抑制算法进行了性能仿真。主瓣指向取为 180°, 旁瓣抑制时约束半功率点主瓣展宽小于等于 4°, 信噪比增益下降小于等于 2dB。仿真结果如图 4 所示, 其中横坐标表示阵元数, 纵坐标表示最大旁瓣电平。图 4(a) 和 (b) 分别显示了旁瓣抑制前后最大旁瓣电平随  $N$  和  $\beta$  变化的趋势。可以看出, 当主瓣宽度和信噪比增益控制在期望范围内时, 旁瓣抑制性能由圆阵半径与信号波长的比值  $\beta$  和阵元数  $N$  共同决定, 其整体变化趋势是随  $\beta$  增大而降低, 随阵元数增加而提高。 $\beta$  的影响占主导地位。 $\beta$  一定时, 旁瓣抑制后的最大旁瓣电平随阵元数增加而有波动地降低, 但是降低到一定程度后就趋于一极限值,

而这一极限值是由  $\beta$  决定的。 $\beta$  越大,这一极限值越高。

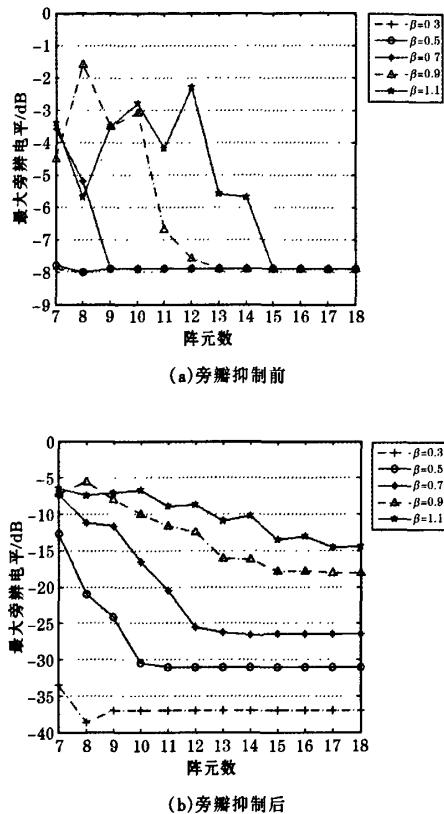


图4 旁瓣抑制性能随阵元数和  $\beta$  变化曲线

## 5 结论

本文基于半定规划理论提出了一种新的阵列天线方向图旁瓣抑制算法。该算法通过合理设计优化准则,实现了对阵列天线方向图旁瓣的有效抑制,并且可以直接根据用户对主瓣宽度和信噪

比增益的要求,灵活、准确控制主瓣展宽和信噪比增益下降。计算机仿真结果验证了该算法的有效性,且体现了旁瓣抑制性能随阵列参数变化的趋势。

## 参考文献:

- [1] LEBRET H, BOYD S. Antenna Array Pattern Synthesis via Convex Optimization [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1997, 45(3):526 - 532.
- [2] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex Optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [3] MALANOWSKI M, KULPA K. Digital Beamforming for Passive Coherent Location Radar[C]// Proc 2008 IEEE Radar Conference, IEEE Press, 2008: 1472 - 1477.
- [4] HUNG G H, HOANG D T, VO B N. Low-Dimensional SDP Formulation for Large Antenna Array Synthesis[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2007, 55(6): 1716 - 1725.
- [5] 胡梦中,宋铮,丁刚.基于遗传算法的任意布阵天线方向图优化[J].电子信息对抗技术,2007,22(1): 36 - 40.
- [6] 董亮,张军,蔡兴雨.一种基于遗传算法的阵列天线方向图综合[J].火控雷达技术,2007,36(3): 30 - 34.
- [7] 龚耀寰.自适应滤波[M].2nd ed.北京:电子工业出版社,2003.
- [8] STURM J F. Using SeDuMi 1.02, A MATLAB Toolbox for Optimization over Symmetric Cones[J]. Optimization Methods and Software, 1999, 11(12): 625 - 653.
- [9] LÖFBERG J. YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB[C]// Proc 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2004: 284 - 289.

(上接第 60 页)

- [7] 李凯.灰色关联分析在舰载通信系统生存能力评估的应用[J].海军大连舰艇学院学报,2002(3):46 - 47.
- [8] 周文坤.一种不确定型多属性决策的组合方法[J].系统工程,2006(3): 35 - 39.
- [9] 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用[M].北京:

清华大学出版社,2004.

- [10] 吕艳辉,潘成胜.基于模糊数的防空 C3I 系统效能评估[J].火力与指挥控制,2007(5): 81 - 83.
- [11] 周宏安,刘三阳.基于二次规划与相对优势度的不确定多属性决策法[J].系统工程与电子技术,2007(4): 559 - 562.

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立,一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养;后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com)),现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地,成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程,广受客户好评;并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书,帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司,以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年, 10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养, 更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果, 又能免除您舟车劳顿的辛苦, 学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲, 结合实际工程案例, 直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>