电偶极子天线的平均能流密度和辐射电阻

江俊勤

(广东第二师范学院 物理系，广东 广州 510303)

摘要:用实数形式的电偶极子电磁场表达式,计算了电偶极子天线的平均能流密度和辐射电阻,纠正了近期一篇论文的错误. 计算结果表明:不论考虑还是忽略电磁场的 $1/r$ 高次幂项，电偶极子的平均能流密度和辐射电阻都是一样的;也就是说，电偶极子电磁场的 $1/r$ 高次幂项是束缚电磁波，对平均能流密度和辐射电阻没有贡献,在这个意义上讲，教科书的辐射电阻公式 $R_r=2\pi/(3c\varepsilon_0)(l/\lambda)^2$ 是精确的.

关键词:电偶极子；天线;电磁场；平均能流密度;辐射电阻

中图分类号:TN 82　**文献标识码**:A　**文章编号**:2095-3798(2013)03-0041-04

0 引言

电偶极子天线是最基本的辐射单元,在电磁辐射理论中有着重要的地位，因而是电磁理论教科书都要讨论的课题[1-9],但由于电磁场比较复杂,这些教科书都只讨论两种极端情况($r\ll\lambda$ 和 $r\gg\lambda$),并进行近似处理,所得到的平均能流密度和辐射电阻公式也一直被人们默认为只是大约的(近似的). 更有甚者,最近有文章声称:用作者[10] 推导的精确电磁场计算出来的电偶极子天线的实际（精确）辐射电阻比文献[1]和[2]的近似结果小40倍,比郭硕鸿的《电动力学》的近似结果[3] 小10倍! 如果真是这样,那么现行文献（教科书）的近似处理方法岂不是太不可靠了?为了弄清情况,下面先简单回顾电偶极子辐射电磁场的推导，然后在实数形式下仔细计算平均能流密度和辐射电阻,并对实数形式和复数形式的计算特点进行比较和讨论.

1 电偶极辐射的电磁场

如图1所示球坐标系中心有一个电偶极子,偶极子的长度为 l. 对于简谐变化电流 $I=I_m e^{-i\omega t}$,根据推迟势

$$\vec{A}(\vec{x}',t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-r/c)}{r}\mathrm{d}V',\tag{1}$$

考虑到电偶极子的定义以及关系式

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A},\ \vec{E}=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_0}\nabla\times\vec{H},\tag{2}$$

收稿日期:2013-03-01

基金项目:广东第二师范学院科研项目(2012yjxm01)

作者简介:江俊勤,男,广东揭阳人,广东第二师范学院物理系教授.

可求得电偶极子的辐射电磁场

$$H_\varphi = \frac{I_m l}{4\pi r}\sin\theta\,(\frac{1}{r} - \mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}, H_r = H_\theta = 0, \tag{3}$$

$$E_r = \frac{2I_m l}{4\pi\omega\varepsilon_0 r^2}\cos\theta(k + \frac{\mathrm{i}}{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}, E_\varphi = 0,$$

$$E_\theta = \frac{I_m l}{4\pi\omega\varepsilon_0 r^2}\sin\theta(k + \frac{\mathrm{i}}{r} - \mathrm{i}k^2 r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}, \tag{4}$$

式中 k 为波数,$k = \omega/c = 2\pi/\lambda$,$\lambda$ 为波长($l \ll \lambda$).

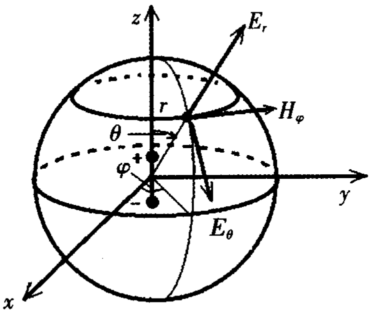

图 1 电偶极子和坐标系

式(3) 和式(4) 正是文[10] 所给出的电磁场精确表达式. 实际上,不论是新编教科书[6-8] 还是早期(比文[10] 早得多) 的文献[4,9] 也都给出了这种精确表达式,它们与式(3) 和式(4) 的区别最多也只是形式不同而已. 这里,精确的含义是保留式(3) 和式(4) 所有的项,即不忽略任何项(文[10] 所讲的精确也是这个含义),这样的电磁场较为复杂,所以教科书在计算平均能流密度和辐射电阻时做了近似处理:设 $r \gg \lambda$,忽略电磁场的 $1/r$ 高次幂项. 据笔者所知,在本文之前只有文[10] 直接用精确表达式计算平均能流密度和辐射电阻.

采用复数形式只是为了方便计算,对于实际存在的电磁场应理解为式(3) 和式(4) 的实部或者虚部,这取决于简谐变化电流是取实部(余弦) 还是虚部(正弦),文献[9] 中电磁场表达式是式(3) 和式(4) 的虚部,因为其简谐变化电流取正弦式.

按照多数作者的习惯,本文取式(3) 和式(4) 的实部作为实际存在的电磁场:

$$H_\varphi = \frac{I_m l k^2}{4\pi}\sin\theta\,[\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t) + \frac{1}{(kr)^2}\cos(kr-\omega t)], H_r = H_\theta = 0. \tag{5}$$

$$E_r = \frac{2I_m l k^3}{4\pi\omega\varepsilon_0}\cos\theta\,[\frac{1}{(kr)^2}\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{(kr)^3}\sin(kr-\omega t)], E_\varphi = 0,$$

$$E_\theta = \frac{I_m l k^3}{4\pi\omega\varepsilon_0}\sin\theta\,[\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t) + \frac{1}{(kr)^2}\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{(kr)^3}\sin(kr-\omega t)]. \tag{6}$$

2 电偶极辐射的平均能流密度和辐射电阻

能流密度定义为 $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$,其方向为电磁场能量的传播方向,其大小为单位时间内流过垂直于传播方向单位面积的能量. 由

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = (E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta)\times H_\varphi\vec{e}_\varphi = S_r\vec{e}_r + S_\theta\vec{e}_\theta, \tag{7}$$

可知,电偶极子的辐射电磁场的能流密度可分解为两个分量:径向能流密度 $S_r = E_\theta H_\varphi$(只考虑大小,下同),切向能流密度 $S_\theta = -E_r H_\varphi$.

先计算径向能流密度,把式(3) 和式(4) 代入 $S_r = E_\theta H_\varphi$,按 $1/r$ 的幂次展开为

$$S_r = S_r^{(2)} + S_r^{(3)} + S_r^{(4)} + S_r^{(5)},$$

$$S_r^{(2)} = \frac{I_m^2 l^2 k^5}{(4\pi)^2\omega\varepsilon_0}\sin^2\theta\,\frac{1}{(kr)^2}\sin^2(kr-\omega t),$$

$$S_r^{(3)} = \frac{I_m^2 l^2 k^5}{(4\pi)^2\omega\varepsilon_0}\sin^2\theta\,\frac{1}{(kr)^3}\sin(2kr-2\omega t),$$

$$S_r^{(4)} = \frac{I_m^2 l^2 k^5}{(4\pi)^2\omega\varepsilon_0}\sin^2\theta\,\frac{1}{(kr)^4}\cos(2kr-2\omega t),$$

$$S_r^{(5)} = \frac{I_m^2 l^2 k^5}{(4\pi)^2\omega\varepsilon_0}\sin^2\theta\,\frac{-1}{2\,(kr)^5}\sin(2kr-2\omega t). \tag{8}$$

由式(8) 可见,S_r 随时间变化规律是比较复杂的,然而,式(8) 在一个周期内对时间求平均所得结果却是简单的:

$$\langle S_r^{(2)} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S_r^{(2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{I_m^2 l^2 k^5}{(4\pi)^2 \omega \varepsilon_0 T} \sin^2\theta \int_0^T \frac{1}{(kr)^2} \sin^2(kr - \omega t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{I_m^2 l^2}{8c\lambda^2 \varepsilon_0 r^2} \sin^2\theta,$$

$$\langle S_r^{(3)} \rangle = \langle S_r^{(4)} \rangle = \langle S_r^{(5)} \rangle = 0,$$

所以

$$\langle S_r \rangle = \frac{I_m^2 l^2}{8c\lambda^2 \varepsilon_0 r^2} \sin^2\theta. \tag{9}$$

再计算切向能流密度,把式(3) 和式(4) 代入 $S_\theta = - E_r H_\varphi$,按 $1/r$ 的幂次展开为

$$S_\theta = S_\theta^{(3)} + S_\theta^{(4)} + S_\theta^{(5)},$$

$$S_\theta^{(3)} = \frac{-I_m^2 l^2 k^5}{(4\pi)^2 \omega \varepsilon_0} \sin\theta\cos\theta \frac{1}{(kr)^3} \sin(2kr - 2\omega t),$$

$$S_\theta^{(4)} = \frac{-2I_m^2 l^2 k^5}{(4\pi)^2 \omega \varepsilon_0} \sin\theta\cos\theta \frac{1}{(kr)^4} \cos(2kr - 2\omega t),$$

$$S_\theta^{(5)} = \frac{I_m^2 l^2 k^5}{(4\pi)^2 \omega \varepsilon_0} \sin\theta\cos\theta \frac{1}{(kr)^5} \sin(2kr - 2\omega t).$$

$$\langle S_\theta^{(3)} \rangle = \langle S_\theta^{(4)} \rangle = \langle S_\theta^{(5)} \rangle = 0.$$

所以

$$\langle S_\theta \rangle = 0, \langle S \rangle = \langle S_r^{(2)} \rangle = \frac{I_m^2 l^2}{8c\lambda^2 \varepsilon_0 r^2} \sin^2\theta. \tag{10}$$

穿过半径为 r 的球面(球心在偶极子中心) 的辐射功率为

$$P = \oint \langle S \rangle r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{2\pi I_m^2 l^2}{8c\lambda^2 \varepsilon_0} \int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi I_m^2}{3c\varepsilon_0} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \tag{11}$$

辐射电阻为

$$R_r = \frac{2P}{I_m^2} = \frac{2\pi}{3c\varepsilon_0} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 784 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \tag{12}$$

式(11) 和(12) 与传统文献(教科书) 所得结果一致,是文[10] 结果的 $4\pi^2 (\approx 40)$ 倍.

3　结论与讨论

本文用实数形式的电偶极子电磁场表达式,详细计算了能流密度的平均值和辐射电阻. 虽然与文[10] 使用复数形式电磁场表达式的方法相比,本文的计算过程略显繁琐,但从计算过程和结果可以获得更多有益的信息.

1) 由于考虑了电磁场的 $1/r$ 高次幂项,能流密度随时间变化规律是比较复杂的,但能流密度的平均值的结果和物理意义却简单明了:径向平均值 $\langle S_r \rangle$ 中共有四项,第一项 $\langle S_r^{(2)} \rangle$ 与 $1/r^2$ 成正比(因此辐射总功率与半径无关),该项对应于电磁场的 $1/r$ 项;其余三项(对应于电磁场的 $1/r$ 高次幂项) 均为零,$S_r^{(3)}$、$S_r^{(4)}$ 和 $S_r^{(5)}$ 都是电磁场之间以及电磁场与波源之间发生径向交换的能量(流),不能向外辐射,也就是说,电磁场的 $1/r$ 高次幂项是束缚电磁波,对平均能流密度和辐射电阻没有贡献,但由于是 $1/r$ 的高次幂项,这种能量交换主要发生在近区(小 r),随着 r 增大,这种能量交换迅速减少. 同理,切向能流密度平均值 $\langle S_\theta \rangle = 0$ 表示 S_θ 是电

磁场之间以及电磁场与波源之间发生切向交换的能量;也是主要发生在近区.

2) 不论考虑还是忽略电磁场的 $1/r$ 高次幂项,平均能流密度和辐射电阻都是一样的,这就是说,虽然教科书在计算平均能流密度和辐射电阻时做了近似处理(设 $r\gg\lambda$,忽略电磁场的 $1/r$ 高次幂项),但所得到的平均能流密度和辐射电阻公式却是精确的:与本文的精确式(10) 和(12) 是一致的 (注:文献[3] 中所讨论的是"中央馈电的平直短天线",它相当于一个长度为 $l/2$ 的电偶极子,因而其辐射电阻是长度为 l 的电偶极子的 1/4,即本文(12) 式的 1/4).

3) 文[10] 的错误在于将 $k = 2\pi/\lambda$ 误为 $k = 1/\lambda$,其结果比文献[1] 和[2] 的结果小了近 40 倍,正是文[10] 漏计 k^2 中的因子 $(2\pi)^2$ 造成的,根本不是由于计人电磁场的 $1/r$ 高次幂项引起的. 事实上,文[10] 的计算到该文的式(9) 为止,结果还是正确的,错误是从该文的式(10) 开始的.

4) 用复数形式的电磁场,通过公式 $\langle\vec{S}\rangle = \mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H})/2$ 直接算出总能流密度平均值,则计算过程大为简化,这是复数形式的优点,但同时也有其不足之处:没有对能流密度及其平均值进行逐项计算,不能展示电磁场的 $1/r$ 高次幂项所对应的能流密度项的作用. 文[10] 用复数形式计算,本来所得到的总能流密度平均值公式也是正确的,却因为犯了一个低级错误(将 $k = 2\pi/\lambda$ 误为 $k = 1/\lambda$) 且不能自查,误以为有了新的发现"结论比钟顺时等编写的《电磁场理论基础》教材中所得结论小近 40 倍".

参考文献:

[1] 钟顺时,钮茂德. 电磁场理论基础[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1995.
[2] 谢处方,饶克谨. 电磁场与电磁波[M]. 北京:高等教育出版社,1999.
[3] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社,1997.
[4] 丁君. 工程电磁场与电磁波[M]. 北京:高等教育出版社,2005.
[5] 林璇英,张之翔. 电动力学题解[M]. 北京:科学出版社,2009: 408-409.
[6] 符果行. 电磁场与电磁波基础教程[M]. 北京:电子工业出版社,2012.
[7] 黄玉兰. 电磁场与微波技术[M]. 北京:人民邮电出版社,2012.
[8] 张洪欣,沈远茂,韩宇南. 电磁场与电磁波[M]. 北京:清华大学出版社,2013.
[9] 梁灿彬,秦光戎,梁竹健. 电磁学[M]. 北京:高等教育出版社,1981.
[10] 赵海军. 电偶极子天线的辐射电阻[J]. 现代电子技术,2009(21):74-75.

Average Energy Flow Density and Radiation Resistance of Electric Dipole Antenna

JIANG Jun-qin
(Department of Physics, Guangdong University of Education, Guangzhou, Guangdong, 510303, P. R. China)

Abstract: By using the real expression of the electric dipole electromagnetic field, the average energy flow density and the radiation resistance of the electric dipole are calculated. The mistake from a recent literature is corrected. It is shown that the radiation resistance is the same whether consider or ignore the higher order terms of $1/r$ in the electric dipole electromagnetic field. That is to say, the higher order terms of $1/r$ in the electric dipole electromagnetic field are bound wave, which do not contribute to the average energy flow density and the radiation resistance. In this sense, the formula $R_r = 2\pi/(3c\varepsilon_0)(l/\lambda)^2$ in the textbooks is accurate.

Key words: electric dipole; antenna; electromagnetic field; average energy flow density; radiation resistance

如 何 学 习 天 线 设 计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训(www.edatop.com)专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…

HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址：http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html

CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览：http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html

13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览：http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html

关于易迪拓培训：

易迪拓培训(www.edatop.com)由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力和专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网(www.mweda.com)，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

我们的课程优势：

※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验

※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求

※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误

※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

联系我们：

※ 易迪拓培训官网：http://www.edatop.com

※ 微波 EDA 网：http://www.mweda.com

※ 官方淘宝店：http://shop36920890.taobao.com