

# 利用分析方法计算微带天线的阻抗

尹逢春 朱 旗 徐善驾

**摘要：**在微波集成电路以及微带阵列的设计中，必须考虑微带结构中存在的相互间的电磁耦合。在采用电场积分方程法和矩量法对这些微带单元的相互耦合进行分析时会遇到索沫菲积分（Sommerfeld Integrals）的计算，由于该积分的存在使得对以上问题的分析十分复杂。为了提高计算和分析的效率，本文采用了一种新的渐近抽取与展开技术〔1〕来分析计算索沫菲积分，利用该方法可以降低索沫菲积分的维数，从而达到提高计算效率的目的。最后利用这种方法计算了某些微带天线的阻抗，结果表明利用本文方法具有较高的计算效率。

**关键词：**索沫菲积分，矩量法，微带天线

## Using Analysis Method to Calculate the Impedence of Microstrip Antennas

Yin Fengchun Zhu Qi Xu Shanjia  
 (University of Science & Technology of China Hefei 230027)

**Abstract** The mutual coupling between microstructures should be taken into account in the designs of microwave intrgrated circuits and microwave array. Unfortunetely, the tedious calculation of Sommerfeld Integrals which occur when Electronic field integral equation (EFIE) and Moment Method (MM) are used to deal with the mutual coupling has made the analysis of mutual coupling difficult. In this paper, a new method combining asymptotic extracting technique and expansion method〔1〕was presented. Using this method the dimension of the Sommerfeld Integrals were lowered so the aim to improve the calculation efficiency could be achieved. Finally, the impedence of several microstrip antennas were determined by this method to demonstrate the efficiency of this method. Numerical results have shown the high efficiency of the method.

**Key words** Sommerfeld Integral (SI), moment method, microstip antennas

## 1 前言

微带线结构具有体积小、重量轻、馈电灵活、便于集成化制作、便于和载体共型等特点，因此被越来越广泛地用于微波集成电路以及微带天线阵中。由于应用条件的限制，在微波集成电路以及微带天线阵的设计中必须考虑微带线包括微带天线阵中微带间的相互耦合。关于微带间的耦合分析大都采用积分方程法和矩量法，由于其中存在着十分棘手的索沫菲积分计算，使得有关耦合的计算十分困难。目前的一些关于索沫菲积分的算法，如快速下降法、复静像法等，各自都有不完善之处，如快速下降法涉及到复平面上计算，较为烦琐；复静像法则需要预先计算抽样点的值，而抽样点选取的偶然性导致了索沫菲积分计算的陷阱，且编程难以一次性得到结果，因而找到一种计算简洁、高效并能与后续分析步骤连贯的数字方法是十分有意义的。为此，本文采用一种新的渐进抽取与展开技术来计算索沫菲积分，使用该方法降低索沫菲积分维数、简化该积分的计算，因而达到了事半功倍之效。最后，利用该方法计算了某些微带天线的阻抗，结果表明本文所用方法具有较高的计算效率。

## 2 公式

### 2.1 利用变换降低积分维数

假定微带阵列振子的厚度远远小于介质中波长，电流是在振子的下表面上流动。由此可得到谱域中典型的阻抗矩阵元素表达式

$$Z_{mn} = 1/(4\pi^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_m(k_x, k_y) \tilde{G}(k_x, k_y) \vec{J}_n^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (1)$$

其中  $\vec{J}_m$  为电流基函数的付立叶变换式,  $\vec{G}$  是谱域中的并矢格林函数。

$$\begin{aligned}\vec{J}_{xm}(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_{xm}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= 2\pi \cdot [W \cdot \sin^2(k_x \cdot L/2)(L \cdot k_x^2)] e^{-jx_m k_x} \cdot J_0(k_y \cdot W/2) \quad (2)\end{aligned}$$

由于微带宽度很窄, 可认为微带的横向电流为零, 只有纵向电流。这样, 只须计算 (1) 式中

包括格林函数  $\vec{G}_{xx}$  的阻抗矩阵  $Z_{mn}^{xx}$ 。格林函数  $\vec{G}_{xx}$  表达式为:

$$\begin{aligned}\vec{G}_{xx}(k_x, k_y) &= -jZ_0 \cdot (\sin k_1 d / k_0) \cdot [(\epsilon_r k_0^2 - k_x^2) k_2 \cos k_1 d + jk_1 (k_0^2 - k_x^2) \\ &\quad \sin k_1 d] / (T_e \cdot T_m) \quad (3)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}T_e &= k_1 \cos k_1 d + jk_2 \sin k_1 d; T_m = -jk_2 \cos k_1 d + jk_1 \sin k_1 d \\ k_1^2 &= \epsilon_r k_0^2 - \beta^2, \text{Im}\{k_1\} < 0; k_2^2 = k_0^2 - \beta^2, \text{Im}\{k_2\} < 0 \\ \beta^2 &= k_x^2 + k_y^2, k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi / \lambda_0, \omega = 2\pi f, Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}\end{aligned}$$

上式中,  $f$  是频率,  $\lambda_0$ 、 $\mu_0$  和  $\epsilon_0$  分别是自由空间的波长、磁导率和介电常数。

由于 (1) 式和 (3) 式中存在贝塞耳函数和积分奇点, 使得阻抗矩阵元素的计算特别费时。为了改进计算效率, 本文采用了一种新的渐进抽取与展开技术<sup>[1]</sup>。在原始格林函数中加减一渐近项, 这样 (1) 式变为:

$$\begin{aligned}Z_{mn}^{xx} &= -1/(4\pi^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_{xm}(k_x, k_y) [\vec{G}_{xx}(k_x, k_y) - \vec{G}_{xx}^{\infty}(k_x, k_y)] \vec{J}_{xn}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \\ &\quad - 1/(4\pi^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_{xm}(k_x, k_y) \vec{G}_{xx}^{\infty}(k_x, k_y) \vec{J}_{xn}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (4)\end{aligned}$$

(4) 式中第一项积分随  $k_0$  增大快速趋于零, 因而可以在适当的位置截断此积分, 一般取  $k_0 = 40 \sim 50k_0$  处截断。注意到

在  $k_0 < \sqrt{\epsilon_r} k_0$  时存在表面波极点, 可以用文献 [2] 的方法计算; 上式中第二项积分的收敛性很差, 而且随着测试函数和基函数取样点间隔增大, 被积项的振荡也随之加剧, 因而也就需要更多的采样点以保证精度, 即需要大量的机时。在计算中, 我们发现本文所讨论的结构中, 对于较大的和来说, 格林函数的渐近项可由下式给出:

$$G_{xx}^{\infty} \approx -jZ_0 / (k_0 \cdot \beta) \cdot (k_0^2/2 - k_x^2 / (\epsilon_r + 1)) \quad (5)$$

另外我们选取具有边缘条件的三角子域基的基函数, 即令:

$$J_{xm}(x, y) = (1 - |x - x_m|/L) / \sqrt{1 - (2y/W)^2}, |2y/W| < 1, |$$

$$(x - x_m)/L| < 1 \quad (6)$$

其中 $W$ 是微带的宽度， $L$ 是基函数的半长。对(6)式进行付立叶变换得：

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{xm}(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_{xm}(x, y) e^{-jk_x x + jk_y y} dx dy \\ &= 2\pi \cdot (W \cdot \sin^2(k_x \cdot L/2) (L \cdot k_x^2)) e^{-jx_m k_x} J_0(k_y \cdot W/2) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $J_0(k_y \cdot W/2)$ 是第一类零阶贝塞尔函数。将(7)式、(5)式代入到(4)式的第二个积分项，可得计算阻抗矩阵渐进部分的另一表达式：

$$Z_{mn}^{A_{sy}} = -jZ_0/(\pi^2 k_0) (2\pi W/L)^2 \{ -k_0^2/2 \cdot I_{mn}^a + I_{mn}^b/(\epsilon_r + 1) \} \quad (8)$$

$$I_{mn}^a = \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(x_s k_x) / \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \cdot \sin^4(k_x \cdot L/2) / k_x^4 [J_0(k_y \cdot W/2)]^2 dk_x dk_y \quad (9)$$

$$I_{mn}^b = \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(x_s k_x) / \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \cdot \sin^4(k_x \cdot L/2) / k_x^4 [J_0(k_y \cdot W/2)]^2 dk_x dk_y \quad (10)$$

其中 $x_s = |x_m - x_n|$ 。利用第一类椭圆积分变换， $I_{mn}^a$ 和 $I_{mn}^b$ 可表示为：

$$\begin{aligned} I_{mn}^a &= 1/\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty K_0(k_y |X - x_s|) [J_0(k_y \cdot W/2)]^2 dk_y \int_0^\infty \cos(k_x X) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin^4(k_x L/2) / k_x^4 dk_x \right\} dX \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} I_{mn}^b &= 1/\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty K_0(k_y |X - x_s|) [J_0(k_y \cdot W/2)]^2 dk_y \int_0^\infty \cos(k_x X) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin^4(k_x L/2) / k_x^4 dk_x \right\} dX \end{aligned} \quad (12)$$

由(11)式和(12)式可见， $I_{mn}^a$ 、 $I_{mn}^b$ 可分别表示为关于 $k_x, k_y$ 积分项的乘积。再利用第一类球勒让德函数及其它一些变换， $I_{mn}^a, I_{mn}^b$ 进一步表示为<sup>[1]</sup>：

$$I_{mn}^a = 1/2 \cdot \int_{-2L}^{2L} A(X - x_s) S_a(X) dX, I_{mn}^b = 1/2 \cdot \int_{-2L}^{2L} A(X - x_s) S_b(X) dX \quad (13)$$

其中

$$S_a(X) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4(k_x \cdot L/2)}{k_x^4} \cos(k_x X) dk_x = \begin{cases} \pi/96 \cdot \{(2L - |X|)^3 - 4(L - |X|)^3\}, |X| < L \\ \pi/96 \cdot (2L - |X|)^3, L \leq |X| < 2L \\ 0, |X| \geq 2L \end{cases} \quad (14)$$

$$S_b(X) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4(k_x \cdot L/2)}{k_x^2} \cos(k_x X) dk_x = \begin{cases} \pi/2 \cdot (1/4 \cdot L - 3/8 \cdot |X|), |X| < L \\ \pi/2 \cdot (-1/4 \cdot L + 1/8 \cdot |X|), L \leq |X| < 2L \\ 0, |X| \geq 2L \end{cases} \quad (15)$$

$$A(X - x_s) = 1/|X - x_s| \cdot \left[ P_{-1/2} \left( \sqrt{1 + (W/|X - x_s|)^2} \right) \right]^2 \quad (16)$$

将(13)、(14)、(15)、(16)式代入(8)式,便可将Zmn化为关于X的一维积分表达式。

## 2.2 积分奇点的处理

对于(16)式中积分奇点 $X_s$ ,可以采取如下步骤计算:首先,根据第一类球勒让德函数的数学表达式,并在积分中利用变量代换,即可得到

$$P_{-1/2}(x) = 2/\pi \cdot \sqrt{2/(x+1)} K((x-1)/(x+1)), x > 1; \quad (17)$$

再利用有关第一类完全椭圆积分的渐近关系式  $\lim_{m \rightarrow 1} [K(m)] = \lim_{m \rightarrow 1} 1/2 \cdot \ln[2/(1-m)]$ , 可将 $A(X - x_s)$ 在区间 $[-2L, 2L]$ 表示为:

$$A^{A_{sy}}(X - x_s) = 2/(W\pi^2) \cdot \ln^2(W/|X - x_s|) \quad (18)$$

由于 $I_{mn}^a$ 在 $X=x_s$ 点处存在奇点,为此将积分区间 $[-2L, 2L]$ 细分为 $[-2L, X_s - \Delta x]$ 、 $[X_s - \Delta x, X_s + \Delta x]$ 和 $[X_s + \Delta x, 2L]$ ,在 $X_s - \Delta x$ 至 $X_s + \Delta x$ 内,代入 $A(X - x_s)$ 和 $S_a(X)$ 的渐进式,利用 $S_a^{A_{sy}}(X) = a_0(X - x_s) + S_a(X_s)$ ,  $a_0 = S_a(X_s)$ ,  $a_0 = S_a(X_s)$ , 则 $I_{mn}^a$ 可变为:

$$I_{mn}^a = 1/2 \cdot \left[ \int_{-2L}^{X_s - \Delta x} A(X - x_s) S_a(X) dX + \int_{X_s - \Delta x}^{X_s + \Delta x} A^{A_{sy}}(X - x_s) S_a^{A_{sy}}(X) dX + \int_{X_s + \Delta x}^{2L} A(X - x_s) S_a(X) dX \right] \quad (19)$$

式中

$$\int_{x_s-\Delta x}^{x_s+\Delta x} A^{A_{sy}}(X-x_s) S_a^{A_{sy}}(X) dX = 4 \cdot \Delta X / (\pi^2 \cdot W) \cdot S_a(x_s) [\text{Ln}^2(W \cdot e / \Delta X) + 1] \quad (20)$$

对于  $I_{mn}^b$  的处理, 除  $x_s=0$  和  $x_s=L$  外与上面的类似, 其中  $S_b^{A_{sy}}(X)=b_0(X-x_s)+S_b(x_s)$ ,  $b_0=-3/16, 0<X_s>L; b_0=1/8, L<X_s<2L$ , 而在  $X_s=0$ ,

$$\int_{x_s-\Delta X}^{x_s+\Delta X} A_b^{A_{sy}}(X) dX = \Delta X / (8\pi \cdot W) \cdot \{4L \cdot \text{Ln}^2(W \cdot e / \Delta X) - 3 \cdot \Delta X [\text{Ln}]^2(W \cdot e / \Delta X) - \text{Ln}(W \cdot e / \Delta X) + 2 \cdot \text{Ln}(2\Delta X \cdot e / W) + 1/2\} \quad (21)$$

和在  $X_s=L$ ,

$$\int_{x_s-\Delta X}^{x_s+\Delta X} A^{A_{sy}}(X-x_s) S_b^{A_{sy}}(X) dX = -\Delta X / (4\pi \cdot W) \{L \cdot \text{Ln}^2(W \cdot e / \Delta X) - \Delta X \cdot [\text{Ln}^2(W \cdot e / \Delta X) - \text{Ln}(W \cdot e / \Delta X) - 1/2]\} \quad (22)$$

中  $e=2.71828$ 。

当  $X_s > 2L$  时, 由于  $A(X-x_s)$  在此区间内不存在奇异性。所以很容易用常用的数值积分程序如辛普森法求出  $I_{mn}^a$  和  $I_{mn}^b$ 。

经过如上所述步骤的计算, 我们就可得到 (1) 式中阻抗矩阵元素表达式的值。

### 3 计算实例

在求得阻抗矩阵元素  $Z_{mn}$  的值后, 利用矩量法 [3] 可得到如下矩阵表达式:

$$[Z_{mn}] \cdot [I_n] = [V_m] \quad (23)$$

电流矩阵  $[I_n]$  代表微带线上的电流分布, 电压矩阵  $[V_m]$  代表微带线上的电压分布。这里我们采用给微带线中心馈电的方法, 即在馈电点处令电压值为1, 其余点为0。一旦获得微带线上电流的分布, 就可求出相应的阻抗大小。

图1、图2分别给出了单个微带线的结构以及计算结果。图3给出了两根互相耦合的微带天线的结构图, 将其等效为如图4所示的二端口网络 [4]。

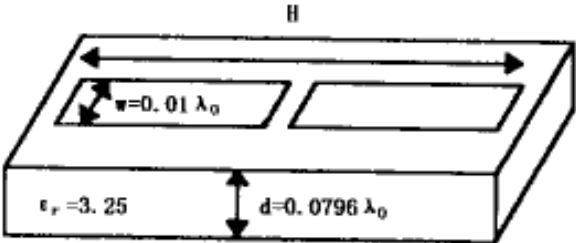


图1 微带天线的结构

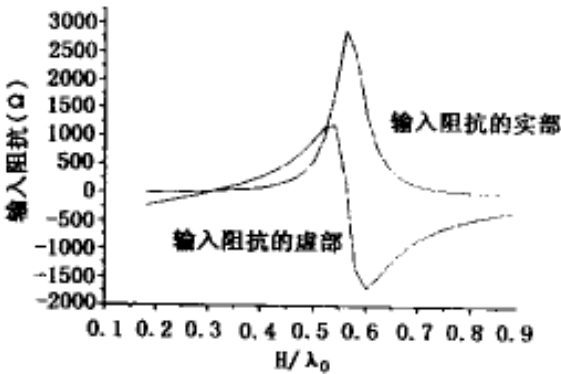


图2 中心馈电微带天线的输入阻抗

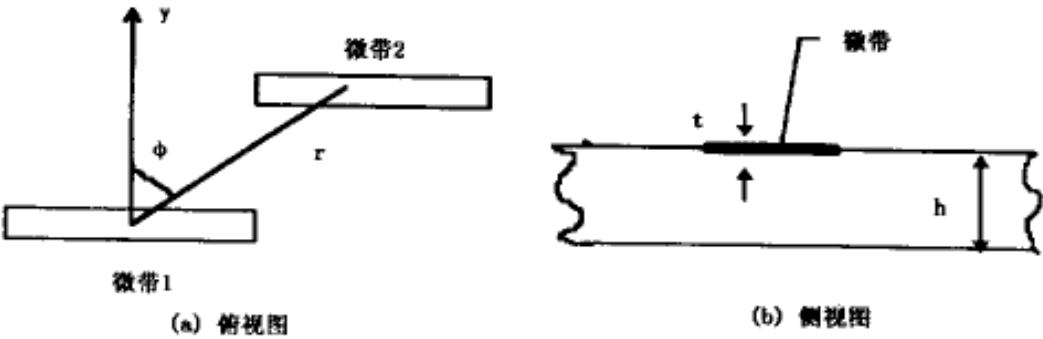


图3 两根耦合的微带天线的俯视图与侧视图

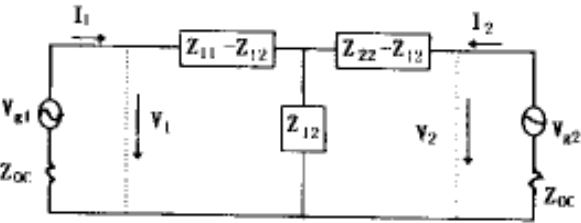


图4 二端口线性等效网络

由图4,可得到如下的关系:

$$V_1=Z_{11}I_1+Z_{12}I_2; V_2=Z_{12}I_1+Z_{22}I_2 \quad (24)$$

其中 $Z_{11}, Z_{22}$ 分别代表端口1和端口2的自阻抗,而 $Z_{12}$ 代表端口1和端口2之间的互阻抗。在奇模电压 $V_0$ 和偶模电压 $V_e$ 激励下,可分别得到如下的阻抗关系式:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 + (Z_1 - Z_{10})(Z_1 - Z_{1e})(Z_{2e} - Z_{20})/Z \\ Z_{22} &= Z_2 - (Z_2 - Z_{20})(Z_2 - Z_{2e})(Z_{1e} - Z_{10})/Z \\ Z_{12} &= (Z_{1e} - Z_{11}) \sqrt{(Z_{2e} - Z_{22})/(Z_{1e} - Z_{11})} \quad (25) \\ Z &= (Z_1 - Z_{10})(Z_2 - Z_{2e}) - (Z_1 - Z_{1e})(Z_2 - Z_{20}) \end{aligned}$$

上式中 $Z_{ie}, Z_{io}(i=1,2)$ 代表端口1和端口2用奇模和偶模分别激励时的输入阻抗,而 $Z_1, Z_2$ 则代表端口1和端口2在非均匀激励源 $V_1=V_0+V_e, V_2=-V_0+V_e$ 分别激励时的输入阻抗。在解出振子上的电流后,利用(25)式的已知关系,就很容易求出这两根微带天线间的互阻抗。图5、图6给出了一些计算结果。

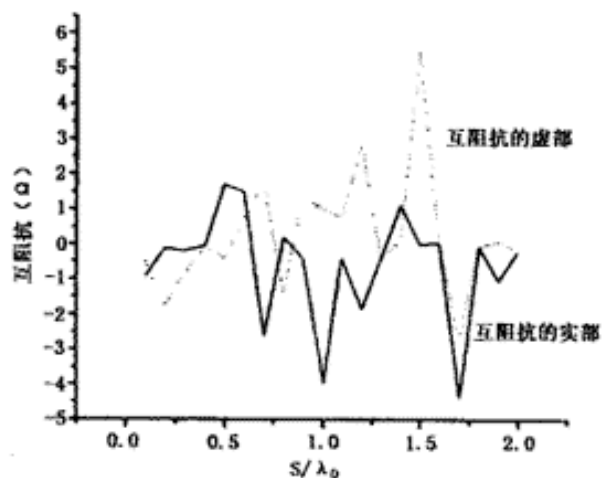


图5 微带天线的互阻抗,  $H=0.4016 \lambda_0$ ,  
 $r=2.1, W=0.01 \lambda_0, h=0.0689 \lambda_0$

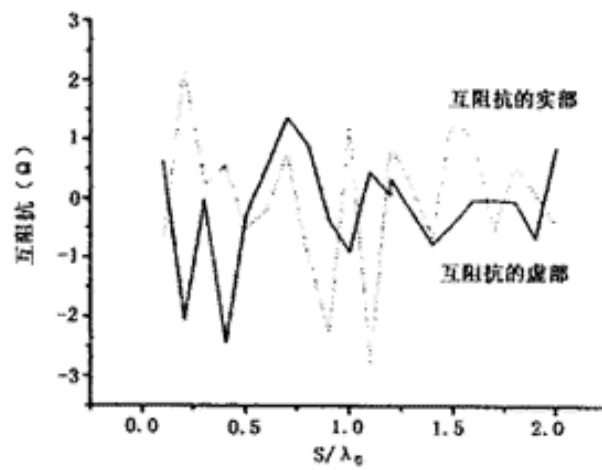


图6 微带天线的互阻抗,  $H=0.30 \lambda_0$ ,  $\epsilon_r=3.25$ ,  
 $W=0.01 \lambda_0$ ,  $h=0.0796 \lambda_0$

#### 4 结论

在利用矩量法计算微带天线的自阻抗和互阻抗时,不可避免地会遇到对 $k_x$ 和 $k_y$ 的二重积分计算。如果不做特殊处理而直接计算的话,将会消耗大量的机时。本文采用近似方法降低了该积分的维数,同时,采用奇点提取将积分中的奇点作特殊计算,因而大大缩短了计算所用时间。作为计算实例,我们计算了微带天线的阻抗。计算所耗费的机时在频率为100MHz的个人计算机上为二十分钟左右,大约为普通方法所耗时间的1/6。

作者简介:尹逢春 1975年生,中国科学技术大学电子工程与信息科学系96级硕士生。现在的研究方向为应用电磁学,感兴趣的领域有应用电磁学、数值计算、微带天线及阵列、微波固态有源器件等。

徐善驾 1939年生,教授、博士生导师。长期从事微波、毫米波和光波理论和技术方面的教学和科研工作。曾获中科院自然科学一等奖、光华科技基金一等奖、中科院重大科研成果二、三等奖,在国内外发表论文近300篇。

朱 旗 1968年生,中国科学技术大学电子工程与信息科学系副教授。目前主要从事应用电磁学、数值计算、微带天线及阵列、微波固态有源器件等的研究。

作者单位:尹逢春 朱 旗 徐善驾 中国科学技术大学电子工程与信息科学系 合肥 230027

#### 参考文献

- 1 S.O.Park and C.A.Balanis. Analytical Technique to Evaluate the Asymptotic Part of Impedance Matrix of Sommerfeld-Type Integrals. IEEE Trans., 1997; AP-45: 798-805
- 2 D.M.Pozar. Input Impedance And Mutual Coupling of Rectangular Microstrip Antennas. IEEE Trans.,1982; AP-30: 1191-1196
- 3 R.F.Harrington. Field Computation by Moment Methods. New York: The Macmillan Company,1968
- 4 P.B.Katehi. A Generalized Method for the Evaluation of Mutual Coupling in Microstrip Arrays. IEEE Trans.,1987; AP-35: 125-133

1999年1月27日收到  
 6月7日收到修改稿

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深, 让许多工程师望而却步, 然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上, 我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识, 借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养, 推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程, 化繁为简, 直观易学, 可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛, 让天线设计不再难...



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书, 课程从基础讲起, 内容由浅入深, 理论介绍和实际操作讲解相结合, 全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程, 可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计, 让天线设计不再难...

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程, 由经验丰富的专家授课, 旨在帮助您从零开始, 全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程, 边操作边讲解, 直观易学; 购买套装同时赠送 3 个月在线答疑, 帮您解答学习中遇到的问题, 让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程, 培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合, 全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作, 同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习, 可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试...

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立,一直致力和专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养;后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com)),现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地,成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程,广受客户好评;并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书,帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司,以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年, 10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养,更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果,又能免除您舟车劳顿的辛苦,学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲,结合实际工程案例,直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>