

基于矢量范数的一类多发射天线系统的性能分析

苏彦兵^{1,2}, 谈振辉¹

(1. 北京交通大学 现代通信研究所, 北京 100044; 2. 海军装备研究院 信息工程技术研究所, 北京 102249)

摘要: 用矢量范数定义了一类多发射天线系统, 并对各系统的中断概率性能进行了研究。分析表明, 虽然各种多发射天线方法根据其接收机和发射机所获得的信道信息不同, 采用不同的功率分配算法和发射编码准则, 但其中断概率随信噪比的增加呈现相似的渐进性能。

关键词: 多发射天线; 矢量范数; 中断概率

中图分类号: TN913.24

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2004)04-0058-06

Performance analysis of a class of multiple transmit antenna systems based on vector norm

SU Yan-bing^{1,2}, TAN Zhen-hui¹

(1. Modern Telecommunication Institute, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. Information Engineering Technology Institute, Navy Equipment Academy, Beijing 102249, China)

Abstract: A class of multiple transmit antenna systems is defined based on vector norm and the outage probability of them are studied. The result shows that although their channel side information are different at transmitter and receiver, as well as power allocation and coding, the decreasing of the outage probability of multiple transmit antenna systems is similar when signal to noise ratio is creased.

Key words: multiple transmit antenna; vector norm; outage probability

1 引言

在衰落信道环境, 已经证明多天线系统比单天线能够提供更大的信息速率^[1,2]。应用于多天线的编码准则可以进一步开发系统的分集增益^[3,4], 这些编码准则依赖于接收机和发射机能够获得的信道状态信息。

对于分组衰落的非遍历信道, 由于信道的仙农容量为零, 用中断概率描述系统性能是比较合适的^[1]。中断概率能够正确反映编码系统的误帧率下界。本文列举了各种不同的多发射天线系统, 虽然根据接收机和发射机能够获得信道信息的不同, 各种系统有其不同的功率分配和发射编码方法, 但都可以归纳为一个根据矢量范数确定上下界的集合。集合中的每种方法在全空间分集下, 都表现出类似的渐进中断概率性能, 即随着信噪比的增加, 中断概率呈现以天线数为指数的指数性衰减。

收稿日期: 2002-04-25; 修订日期: 2003-11-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90104016); 高校博士点专项基金资助项目(20020004022)

2 系统模型

考虑一个独立同分布的分组衰落信道模型^[1], 对于一个多发射天线无线通信系统, 具有 M 个发射天线和一个接收天线, 则接收信号的复值基带信号可以表示为

$$y = \mathbf{h}x + n \quad (1)$$

式中 x 为 $M \times 1$ 的发射符号矢量, \mathbf{h} 为 $1 \times M$ 信道矢量, n 为噪声, y 为接收信号。假定 \mathbf{h} 中的每个元素都是均值为 0、单位方差的循环对称复值高斯变量, 且各元素独立同分布, n 是均值为 0、方差为 σ^2 的循环对称复值加性白高斯噪声。另外假定发射机的总功率限制为 P , 即 $E[x^H x] \leq P$, 式中上标 H 表示矢量 x 的共轭转置。

对于分组衰落信道, 即信道参数在一帧内保持不变, 可以用文献[1]中的中断概率来衡量系统的性能。对于一个给定的速率 R 和功率 P , 最大互信息可以表示为

$$I(x; y | \mathbf{h}) = \log\left(1 + \frac{\mathbf{h}Q\mathbf{h}^H}{\sigma^2}\right) \quad (2)$$

则中断概率表示为

$$\Pi_{\text{out}}(R, P) = \inf_{Q \geq 0, \text{tr}(Q) \leq P} \Pr\left[\log\left(1 + \frac{\mathbf{h}Q\mathbf{h}^H}{\sigma^2}\right) < R\right] \quad (3)$$

式中 $Q = E[xx^H]$, 为发射符号的相关矩阵; $\text{tr}(\cdot)$ 表示求矩阵的迹。

下面我们根据中断概率研究各种多发射天线系统的性能。

3 以矢量范数界定的多发射天线系统

本文研究的多发射天线系统均符合如下特征, 发射机向各个发射天线分配功率和相位, 接收机采用最大似然译码恢复出原始发射数据, 所有多发射天线系统都呈现全空间分集特性。

根据式(2)和式(3), 可以定义一种多发射天线系统 A 的中断概率为

$$\Pi_{\text{out}}^A(R, P) = \Pr[I_A(x; y | \mathbf{h}) < R] \quad (4)$$

定义 1 定义一个多发射天线系统集合 S , 其中每个多发射天线系统的最大互信息均满足下面不等式确定的上下界。对于任何给定的多发射天线系统 $A \in S$ 和任何信道 \mathbf{h} , 存在一个矢量范数 $\|\cdot\|_A$ 和独立于 \mathbf{h} 的正常数 k_1, k_2, n_1, n_2 , 使得 A 经过 \mathbf{h} 后获得的最大互信息 $I_A(x; y | \mathbf{h})$ 有如下的上下界

$$n_1 \log\left(1 + \frac{k_1 P}{\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_A^2\right) \leq I_A(x; y | \mathbf{h}) \leq n_2 \log\left(1 + \frac{k_2 P}{\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_A^2\right) \quad (5)$$

随后的分析表明, 集合 S 具有普遍性, 包括多个有效的多发射天线系统, 如空时码、空间注水、波束形成和选择分集发射等。

4 多发射天线系统的中断概率

对于前面定义的集合 S 中的多发射天线系统, 在 Rayleigh 衰落信道, 保证全空间分集的

条件下，其中断概率以 $(SNR)^{-m}$ 渐进降低， m 为发射天线数，即可得到的空间分集数。下面我们通过分析加以证明。

引理 1 根据文献[5]，令 $I_F(x; y | h) = \log(1 + \frac{kP}{\sigma^2} \|h\|_F^2)$ ，其中 k 为任意正常数， $\|h\|_F^2 = \text{tr}(hh^H)$ 为 Frobenius 范数的平方。即 $\Pi_{\text{out}}^F(R, P) = \Pr[I_F(x; y | h) < R]$ ，则中断概率的上界为

$$\Pi_{\text{out}}^F(R, P) \leq \min_{1 \leq r \leq m} \frac{(r(2^R - 1))^r}{r!} \left(\frac{kP}{\sigma^2}\right)^{-r} \quad (6)$$

文献[4]证明，上式中断概率的上界随着信噪比的增加而渐进收紧，即 $\Pi_{\text{out}}^F(R, P) \leq \frac{(m(2^R - 1))^m}{m!} \left(\frac{kP}{\sigma^2}\right)^{-m}$ ，我们把它表示为 $\Pi_{\text{out}}^F(R, P) \sim K_F \left(\frac{P}{\sigma^2}\right)^{-m}$ ， K_F 独立于 P 。

证明 根据式(3)，中断概率为 $\Pi_{\text{out}}(R, P) = \inf_{Q \geq 0, \text{tr}(Q) \leq P} \Pr[\log(1 + \frac{hQh^H}{\sigma^2}) < R]$ ，将 Q 对角化，其中包含 k 个相等的对角元素以及 $m-k$ 个零，每个非零对角元素都有一个中断概率上界

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{out}}(R, P) &\leq \Pr[\log(1 + \frac{P}{k\sigma^2} \sum_{i=1}^k \|h_i\|^2) < R] \\ &\Rightarrow \Pi_{\text{out}}(R, P) \leq \Pr[\sum_{i=1}^k \|h_i\|^2 < \frac{k(2^R - 1)\sigma^2}{P}] \\ &\Rightarrow \Pi_{\text{out}}(R, P) \leq \Pr[\sum_{i=1}^k \|h_i\|^2 < x] \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $x = \frac{k(2^R - 1)\sigma^2}{P}$ 。上式的概率等于自由度为 $2k$ 的 χ^2 累积分布函数

$$\Pi_{\text{out}}(R, P) \leq 1 - e^{-x} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{x^l}{l!} \quad (8)$$

不等式右边为 χ^2 的累积分布函数。进一步简化得到

$$\Pi_{\text{out}}(R, P) \leq 1 - e^{-x} (e^x - \sum_{l=k}^{\infty} \frac{x^l}{l!}) = e^{-x} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \leq \frac{x^k}{k!} \quad (9)$$

根据 x 的定义可直接得到

$$\Pi_{\text{out}}(R, P) \leq \frac{x^k}{k!} = \frac{(k(2^R - 1))^k}{k!} \left(\frac{P}{\sigma^2}\right)^{-k} \quad (10)$$

由于对每个 k 均满足上式， $1 \leq k \leq m$ ，式(6)得证。

定理 1 给定信道 h ，其各元素均为独立同分布循环对称高斯随机变量，则对于集合 S 中的任何多发射天线系统 A ，经过信道 h 的中断概率随信噪比的增加逐渐减小，且趋近于 $\left(\frac{P}{\sigma^2}\right)^{-m}$ ， m 为发射天线数。

证明 根据定义 1 中 S 的定义，对于任一 $A \in S$ ，最大互信息 $I_A(x; y | h)$ 满足式(5)由范

数 $\|\cdot\|_A$ 确定的上下界。根据向量范数的等价性^[6]，任给两个正常数 C_1, C_2 有

$$C_1 \|\mathbf{h}\|_{\text{F}}^2 \leq \|\mathbf{h}\|_A^2 \leq C_2 \|\mathbf{h}\|_{\text{F}}^2 \quad (11)$$

将式(11)代入式(5)得

$$n_1 \log(1 + \frac{D_1 P}{\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_{\text{F}}^2) \leq I_A(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) \leq n_2 \log(1 + \frac{D_2 P}{\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_{\text{F}}^2) \quad (12)$$

式中 $D_1 = C_1 k_1$, $D_2 = C_2 k_2$ 。由此可以得到中断概率的上下界

$$\Pr[n_2 \log(1 + \frac{D_2 P}{\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_{\text{F}}^2) < R] \leq \Pr[I_A(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) < R] \leq \Pr[n_1 \log(1 + \frac{D_1 P}{\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_{\text{F}}^2) < R] \quad (13)$$

由引理1可知，随着信噪比的增加，概率 $\Pr[I_A(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) < R]$ 的上下界均渐进趋于 $(\frac{P}{\sigma^2})^{-m}$ ，

因此，中断概率 $\Pi_{\text{out}}^A(R, P) = \Pr[I_A(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) < R]$ 也渐进趋于 $(\frac{P}{\sigma^2})^{-m}$ ，证毕。

5 多发射天线系统举例

属于集合 S 且中断概率符合定理1的多发射天线系统包括空时码、空间注水、波束形成和选择发射分集。

(1) 空时码：接收机已知完全的信道信息，发射机未知，则各发射天线之间等功率分配，且采用独立的高斯编码，可以得到互信息的最大值为

$$I_{\text{STC}}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m \log(1 + \frac{P}{m\sigma^2} \lambda_i) \quad (14)$$

式中 λ_i 为 $\mathbf{h}\mathbf{h}^H$ 的特征值。因此我们得到

$$\log(1 + \frac{P}{m\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_2^2) \leq I_{\text{STC}}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) \leq m \log(1 + \frac{P}{m\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_2^2) \quad (15)$$

式中 $\|\cdot\|_2$ 为2范数，且 $\|\mathbf{h}\|_2^2 = \lambda_{\max}$ 为 $\mathbf{h}\mathbf{h}^H$ 的最大特征值。显然空时码属于集合 S 且中断概率符合定理1，即对于大信噪比满足 $\Pi_{\text{out}}^{\text{STC}}(R, P) \sim K_{\text{STC}} (\frac{P}{\sigma^2})^{-m}$ ， K_{STC} 是一个依赖于 R 但独立于 P 的常数。空时码不要求反馈资源，但是解码复杂度随发射天线数指数增加。

(2) 空间注水：接收机和发射机均已知完全的信道信息，各发射天线之间的功率分配采用注水算法，即正比于对应特征值的倒数，各天线沿信道的特征矢量发射独立的高斯编码，可以得到互信息的最大值为

$$I_{\text{SWF}}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m \log(1 + \frac{P_i}{\sigma^2} \lambda_i) \quad (16)$$

式中 P_i 由 $(\mu - \lambda_i^{-1})^+$ 给出，选择 μ 满足功率约束^[1] $\sum_{i=1}^m P_i = P$ 。同样我们得到

$$\log\left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_2^2\right) \leq I_{\text{SWF}}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) \leq m \log\left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \|\mathbf{h}\|_2^2\right) \quad (17)$$

因此, 集合 S 包括空间注水, 对于大信噪比, 满足 $\Pi_{\text{out}}^{\text{SWF}}(R, P) \sim K_{\text{SWF}} \left(\frac{P}{\sigma^2}\right)^{-m}$, K_{SWF} 为独立于 P 的常数。空间注水要求大量反馈资源, 解码复杂度随发射天线数线性增加。

(3) 波束形成: 发射机已知信道最大特征值, 并且沿信道最大特征矢量方向发射。最大互信息表示为

$$I_{\text{BF}}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) = \log\left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \lambda_{\max}\right) \quad (18)$$

由 (1) 知, $\|\mathbf{h}\|_2^2 = \lambda_{\max}$, 可见波束形成也属于集合 S 。波束形成的解码复杂度独立于发射天线数, 但是要求大量的反馈资源。

(4) 选择发射分集: 发射机选择具有最大信噪比的信道发射。此时, 最大互信息为

$$I_{\text{SD}}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{h}) = \log\left(1 + \frac{P}{\sigma^2} h_{\max}\right) \quad (19)$$

式中 $h_{\max} = \arg \max_h |\mathbf{h}_i|^2$, 因为酉空间中矢量的长度就等于矢量范数^[6], 所以选择发射分集也属于集合 S 。选择发射分集的解码复杂度与发射天线数无关, 要求每帧反馈 $\log_2 m$ 比特。

图 1 和图 2 给出了上述各种多发射天线系统的中断概率和遍历信道容量性能。我们采用 4 个发射天线和 1 个接收天线, 令 $R=4\text{bit}/(\text{s} \cdot \text{Hz})$ 。从图中可以看出, 随着信噪比的增加, 各种多天线发射方法的中断概率呈现相似的下降斜度, 只有选择发射分集下降比较缓慢; 而各种多天线发射方法的遍历容量随信噪比的增加呈现不同的增长趋势, 空时码和空间注水比波束形成和选择发射分集的容量增长得更快。

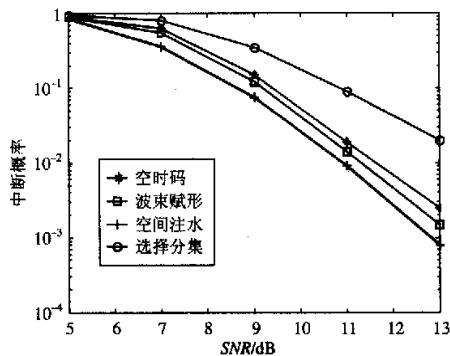


图 1 各种多天线发射方法中断概率比较

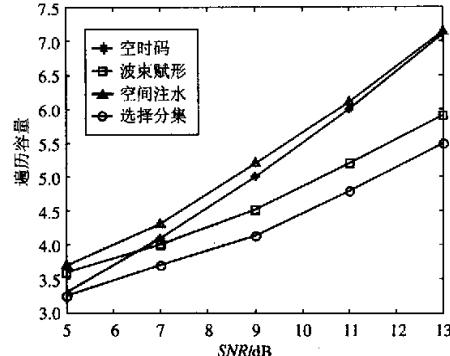


图 2 各种多天线发射方法遍历容量比较

6 结论

本文研究了分组衰落信道下多发射天线系统的中断概率性能。首先对于全空间分集系统定义了一种多发射天线系统集合, 然后证明空时码、空间注水、波束形成和选择发射分集均属于这一集合, 并对各种方法的中断概率进行了分析。结果表明, 对于 Rayleigh 衰落信道,

所有多发射天线系统的中断概率随着信噪比的变化呈现出相似的渐进性, 即随着信噪比的增加而减小, 这种性能在实际系统中就体现为误帧率随信噪比的增加而减小。

参考文献:

- [1] TELATAR E. Capacity of Multiple-Antenna Gaussian Channels[R]. AT&T Bell Labs Internal Tech Memo, 1995.
- [2] FOSCHINI G J. Layered Space-Time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment When Using Multiple-Element Antennas[R]. Bell Lab Tech J, 1996.41-59.
- [3] TAROKH V, SESHADRI N, CALDERBANK A R. Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criterion and code construction[J]. IEEE Trans on Inform Theory, 1998,44(3):744-765.
- [4] ALAMOUTI S M. A simple transmit diversity technique for wireless communications[J]. IEEE J Select Areas on Commun, 1998, 16(10): 1451-1458.
- [5] MUHAREMOVIC T, AAZZHANG B. On outage and capacity for orthogonal transmit diversity[EB/OL]. <http://www.ece.rice.edu/~tarik/OTD.ps>.
- [6] 罗家洪. 矩阵分析引论(第二版) [M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.

作者简介:



苏彦兵 (1969-), 男, 内蒙古包头人, 海军装备研究院信息技术研究所工程师, 北京交通大学在职博士生, 主要研究方向为移动数据通信。



谈振辉 (1944-), 男, 江苏扬州人, 北京交通大学教授、博士生导师, 主要研究方向为宽带无线通信, CDMA 通信。

如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训(www.edatop.com)专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…



HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



关于易迪拓培训:

易迪拓培训(www.edatop.com)由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网(www.mweda.com)，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>