

# 天线阵通道增益和相位不一致的 子空间校正法

林 敏 龚铮权

**摘要** 本文基于子空间基本原理,提出了一种天线阵通道增益和相位不一致的校正方法。该方法的优点在于校正时允许天线阵同时接收校正信号和待测信号。计算机模拟结果证明了这种方法不受天线阵排列形式的限制,而且能用于小信噪比的情况,从而具有很强的实用性。

## 一、引言

基于阵列信号处理技术来突破瑞利极限从而实现超分辨率测向,已经成为电子对抗、移动通信、声纳等领域的一个研究热点<sup>[1]</sup>,其中以 Schmidt 博士提出的 MUSIC 法<sup>[3]</sup>为代表的各种信号 DOA 估计算法,在理想条件下具有很好的性能。但是在实际应用过程中,天线阵各个通道的增益和相位不一致性往往会导致测向性能急剧下降甚至完全失效。因此,阵列各个通道不一致的校正问题引起了国内外众多学者的广泛关注<sup>[1][2]</sup>,并提出了一些解决办法<sup>[4]-[10]</sup>。其中文献[4][5]仅限于均匀线阵的情况,文献[6][7][8]要求校正时天线阵只能接收来自辅助源的信号,文献[9]不能对通道的相位因子进行校正。尽管文献[10]试图以迭代的方法同时校正误差和估计出信号的 DOA,但它有两大缺点,一是只能应用于非线性阵,并且信号源的数目必须足够多,二是计算量大、收敛速度慢,并且结果很容易落到局部最小点。跟它们有所不同,本文基于子空间的基本原理,提出了一种新的校正方法。该方法的优点在于校正时允许天线阵同时接收到校正信号和待测信号,并且它还适用于任何形式的天线阵和小信噪比的情况,从而大大方便了工程应用。计算机模拟结果证明了这种方法能有效地校正天线阵通道增益和相位的不一致性。

## 二、问题的描述

如图 1 所示,对于由  $N$  个无方向性点元组成的平面天线阵,以第 1 个和第 2 个阵元的连线为  $X$  轴建立坐标系。假设有  $M$  个来自远场的窄带信号入射到该天线阵上,那么它的输出信号矢量:

$$\mathbf{X}(t) = \Gamma \mathbf{A} \mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ ,  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)]^T$ ,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)]^T$ ,  $n_i(t)$  为第  $i$  个阵元中零均值且方差等于  $\sigma^2$  的高斯加性白噪声。 $\Gamma = \text{diag}(1, r_2, \dots, r_N)$ , 其中  $r_i$  ( $i=2, 3, \dots, N$ ) 表示对第 1 个通道归一后的第  $i$  个通道的传输系数。方向矩阵  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)]$ ,  $\mathbf{a}(\theta_m)$  为天线阵对于第  $m$  个信号的引导矢量 (Steering Vector), 它的第  $n$  个元素:

$$a_n(\theta_m) = \exp(-jk\vec{\rho}_n \cdot \hat{e}_m) = \exp[jk(x_n \sin \theta_m + y_n \cos \theta_m)]$$

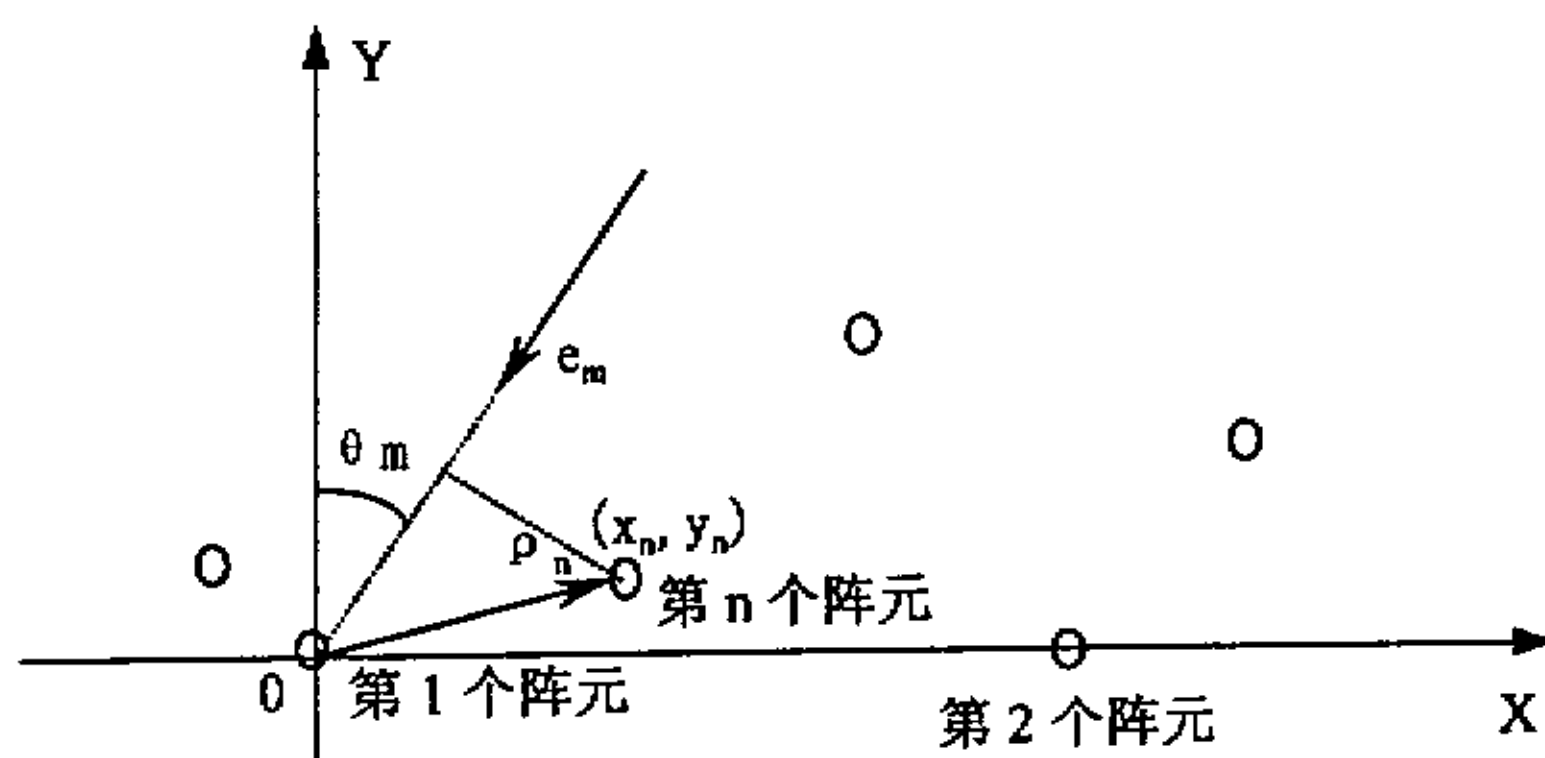


图1 任意排列的平面天线阵示意图

于是输出协方差矩阵:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^H] = \Gamma \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H \Gamma^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}(t)^H]$  是信号复包络的协方差矩阵。对  $\mathbf{R}$  进行特征值分解后, 它的  $M$  个大特征值和  $N-M$  个小特征值对应的特征向量分别构成信号子空间  $\mathbf{E}_s$  和噪声子空间  $\mathbf{E}_n$ , 即  $\mathbf{E} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M; \mathbf{u}_{M+1}, \dots, \mathbf{u}_N] = [\mathbf{E}_s; \mathbf{E}_n]$ , 不难得到:

$$\text{Range}\{\Gamma \mathbf{A}(\theta)\} = \text{Range}\{\mathbf{E}_s\} \perp \text{Range}\{\mathbf{E}_n\} \quad (3)$$

这就是广泛应用于阵列信号处理的子空间基本原理。很显然, 考虑到天线阵各通道的不一致性后, MUSIC 算法的空间谱函数应该是:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\|\mathbf{E}_n^H \Gamma \mathbf{a}(\theta)\|^2} \quad (4)$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示 Frobenius 范数。因此, 校正的关键在于求得误差矩阵  $\Gamma$ 。

### 三、天线阵通道增益和相位不一致的校正方法

假设  $M$  个入射信号中有  $L$  个 ( $L \geq 2$  且  $M \leq N-1$ ) 为方向已知的校正信号, 构造代价函数:

$$J = \sum_{l=1}^L \|\mathbf{E}_n^H \Gamma \mathbf{a}(\theta_l)\|^2 \quad (5)$$

根据子空间基本原理, 求误差矩阵  $\Gamma$  等效于解下面的最小化问题:

$$\Gamma = \arg \min_{\Gamma} \sum_{l=1}^L \|\mathbf{E}_n^H \Gamma \mathbf{a}(\theta_l)\|^2 \quad (6)$$

显然这是一个  $N-1$  维的最优问题, 如果采用搜索的方法, 那么计算量是相当大的。由于  $\Gamma \mathbf{a}(\theta_l) = \mathbf{B}(\theta_l) \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{B}(\theta_l) = \text{diag}(a_1(\theta_l), a_2(\theta_l), \dots, a_N(\theta_l))$ ,  $\mathbf{r} = [1, r_2, \dots, r_N]^T$ , 于是 (6) 式又可变成:

$$\mathbf{r} = \arg \min_{\mathbf{r}} \sum_{l=1}^L \|\mathbf{E}_n^H \mathbf{B}(\theta_l) \mathbf{r}\|^2 \Leftrightarrow \arg \min_{\mathbf{r}} \mathbf{r}^H \mathbf{Q} \mathbf{r} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{l=1}^L [\mathbf{B}^H(\theta_l) \sum_{n=M+1}^N (\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H) \mathbf{B}(\theta_l)] \\ &= \sum_{n=M+1}^N \{ \text{diag}(\mathbf{u}_n) \sum_{l=1}^L [\mathbf{a}^*(\theta_l) \mathbf{a}^T(\theta_l)] \text{diag}(\mathbf{u}_n^*) \} \end{aligned}$$

很显然,  $\mathbf{Q}$  为一个正定的 Hermitan 矩阵。令  $\mathbf{w} = [1, 0, \dots, 0]^T$ , 那么:

$$\mathbf{r}^H \mathbf{w} = 1 \quad (8)$$

(7) 和 (8) 两个式子组成了一个线性约束条件下的二次最小值求解问题, 采用 Lagrange 乘子法后, 不难得出:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{w}} \quad (9)$$

由上式很容易进一步求得误差矩阵  $\Gamma$ , 即  $\Gamma = \text{diag}(1, r_2, \dots, r_N)$ 。

#### 四、计算机模拟结果

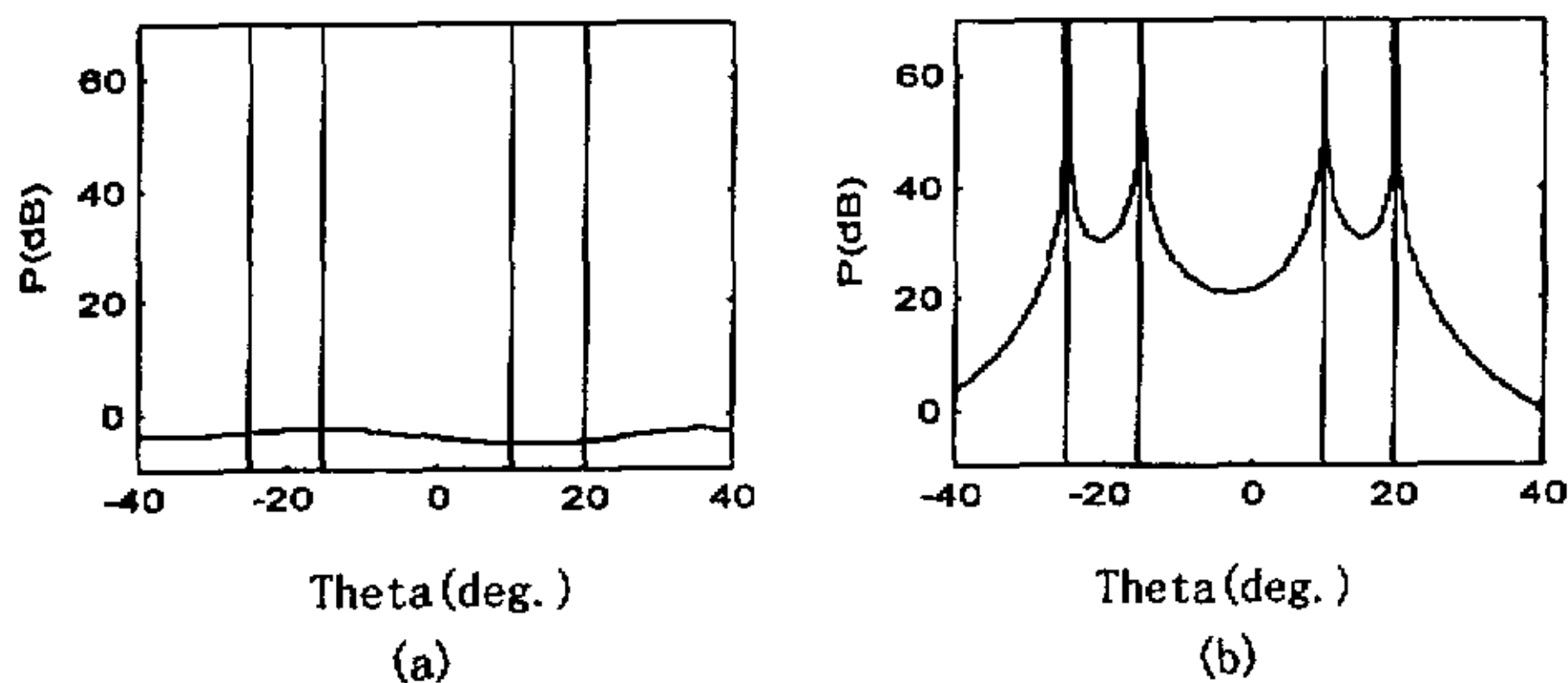
下面通过计算机模拟来验证这种校正方法的可行性, 同时还给出相应的结论。模拟时假设阵列各通道的增益和相位因子有如下关系式<sup>[10]</sup>:

$$|r_n| = 1 + \sqrt{12}(\rho_n - 0.5)\sigma_a \quad (10a)$$

$$\arg(r_n) = \sqrt{12}(\varphi_n - 0.5)\sigma_b \quad (10b)$$

式中的  $\rho_n$  和  $\varphi_n$  均为在  $[0, 1]$  范围内均匀分布的随机数,  $\sigma_a^2$  和  $\sigma_b^2$  则分别表示增益和相位因子的方差, 求协方差矩阵时快拍数取 512。

实验 1: 天线阵为一个均匀分布的 8 元圆形阵, 圆的半径为  $0.65\lambda$ , 远场有 4 个 SNR 均为 20dB 的不相干信号, 它们分别位于  $-25^\circ$ 、 $-15^\circ$ 、 $10^\circ$ 、 $20^\circ$ , 其中  $10^\circ$  和  $20^\circ$  的 2 个信号为方向已知的校正信号。校正前后的空间谱曲线如图 2 中的 a 和 b 所示, 可以看出没有经过校正的 MUSIC 谱线已经失效, 而校正之后的空间谱曲线在 4 个信号方向上出现了尖峰, 这就证明了新的校正方法是成功的。另外, 图 2c 和 d 还给出了 SNR=0dB 以及校正源偏差在  $0.5^\circ$  两种情况下的计算机模拟结果, 可见这种方法能应用于小信噪比的场合, 并且也能容忍一定的校正源误差。



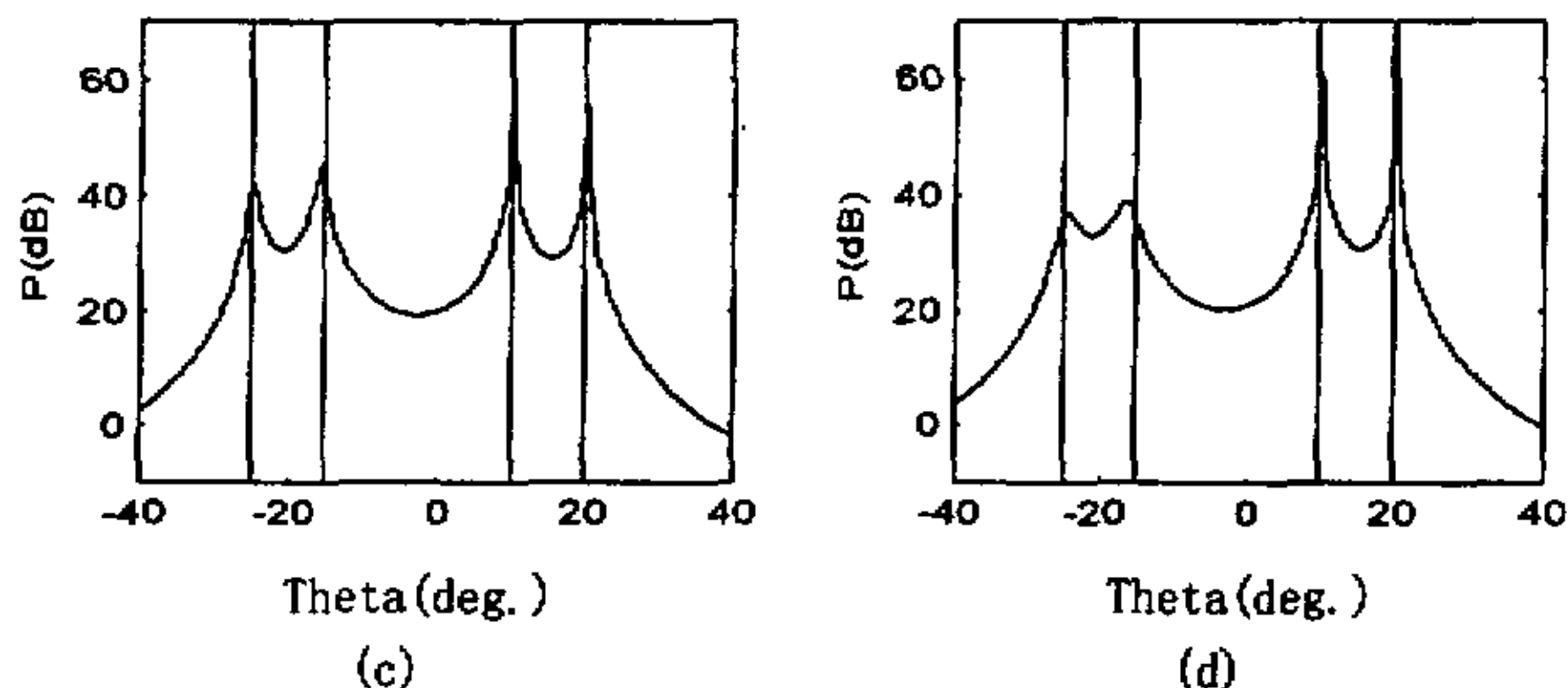


图2 校正前后均匀圆形阵的空间谱曲线

实验2: 天线阵为一个以  $0.5\lambda$  等距分布的8元直线阵, 其他参数同实验1。图3a中的曲线1和2分别表示校正前后的空间谱曲线, 图3b表示经过  $\text{SNR}=0\text{dB}$  的信号校正后的情况, 可见本文的方法同样适用于直线阵。

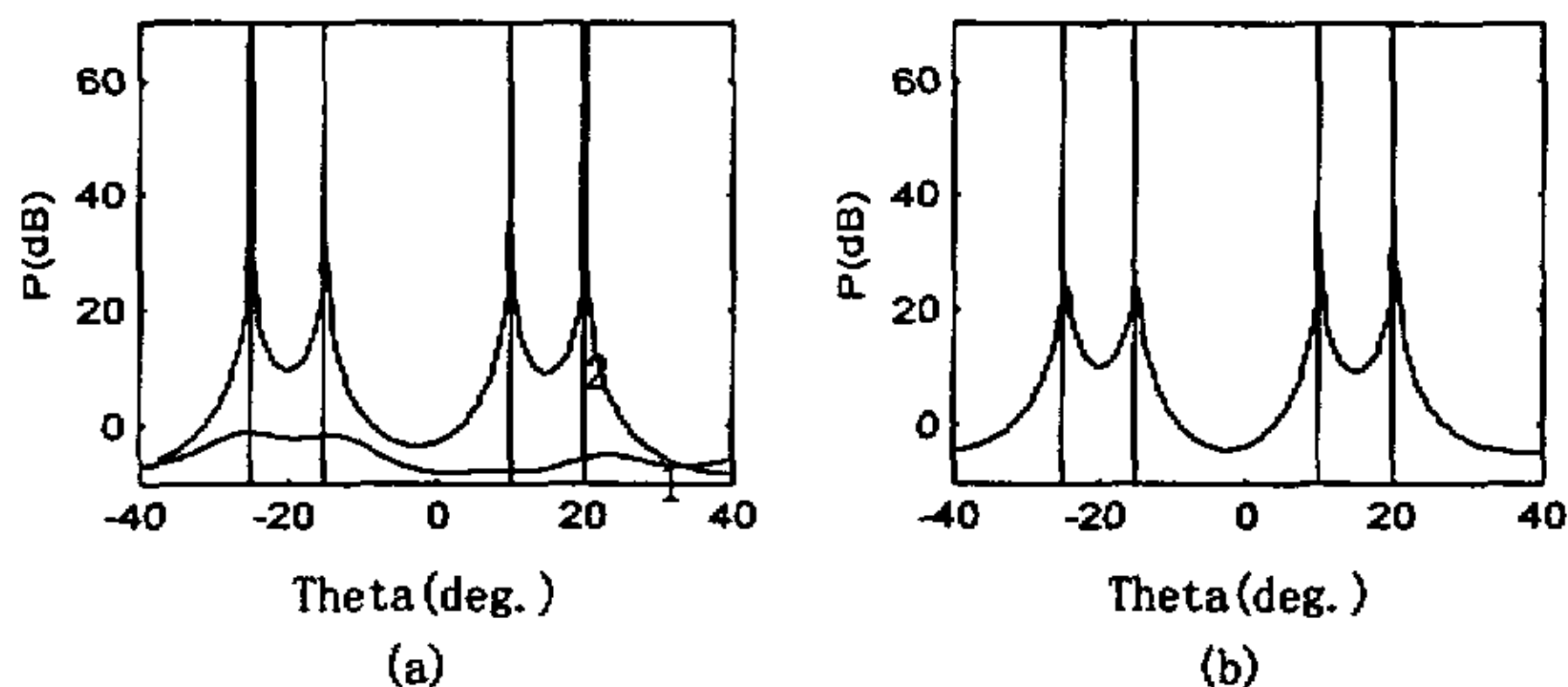


图3 校正前后等距线阵的空间谱曲线

## 五、结束语

如何校正天线阵各通道增益和相位的不一致性, 是各种测向算法走向实用过程中必须要解决的一个技术难点。本文基于子空间的基本原理, 提出了一种新的校正方法, 该方法克服了其他方法要求校正时天线阵只能接收到校正信号的缺点, 并且它还具有不受天线阵排列方式的限制, 能用于较低  $\text{SNR}$  的情况等优点, 从而大大方便了工程应用。文中最后给出的计算机模拟结果证明了这一点。

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深, 让许多工程师望而却步, 然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上, 我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识, 借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养, 推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程, 化繁为简, 直观易学, 可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛, 让天线设计不再难...



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书, 课程从基础讲起, 内容由浅入深, 理论介绍和实际操作讲解相结合, 全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程, 可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计, 让天线设计不再难...

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程, 由经验丰富的专家授课, 旨在帮助您从零开始, 全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程, 边操作边讲解, 直观易学; 购买套装同时赠送 3 个月在线答疑, 帮您解答学习中遇到的问题, 让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程, 培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合, 全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作, 同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习, 可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试...

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立,一直致力和专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养;后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com)),现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地,成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 ADS、HFSS 等专业软件使用培训课程,广受客户好评;并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书,帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司,以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年, 10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养,更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果,又能免除您舟车劳顿的辛苦,学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲,结合实际工程案例,直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>