

文章编号 1005-0388(2005)02-0147-04

# 双位积分方程在分析地面上 线天线中的应用

何绍林 金元松 邓冀云

(中国电波传播研究所,河南 新乡 453003)

**摘要** 导出了任意取向线天线在基于 sommerfeld 积分的反射系数近似条件下的双位积分方程,采用多项式基函数和点匹配的矩量法对该方程求解,给出阻抗元素计算的一般表达式。计算结果表明了该方法的有效性。

**关键词** Sommerfeld 积分, 双位积分方程, 矩量法

中图分类号 TN821 文献标识码 A

## Application of two-potential integral equation into analyzing wire antennas above ground plane

HE Shao-lin JIN Yuan-song DENG Ji-yun

(China Research Institute of Radiowave Propagation, Xinxiang Henan 453003, China)

**Abstract** Based on the approximation of reflection-coefficient of Sommerfeld integral formulation, the two-potential integral equations of arbitrarily oriented wire antennas above ground plane are presented in this paper. By using the method of moment with polynomial basis functions and a Dirac testing function to calculate the integral equations, the general expressions of impedance-element are obtained. The numerical results show the availability of the method.

**Key words** sommerfeld integral two-potential integral equation method of moments

## 1 引言

处于具有真实电参数地面附近的天线,由于天线和地面之间的近场相互作用,影响到天线上的电流分布,从而引起辐射场改变。对于地面上导线天线的电性能求解,在许多文献<sup>[1,2,3]</sup>中进行了讨论。严格的求解是将地面的影响用 Sommerfeld 积分来表示,但由于 Sommerfeld 积分中的被积函数是特殊函数的广义积分,要严格地求解 Sommerfeld 积分是非常复杂和费时的。Krauss 提出了简化 Sommerfeld 积分的平面波反射系数近似法。E. K. Miller<sup>[4,5]</sup>等把这一方法用于磁矢量位积分方程中

得到良好的结果。此方法是将严格 Sommerfeld 积分表示的反射场认为是由理想地面的镜像源产生的场和 Fresnel 平面波反射系数的积,而此时反射系数是积分变量的函数,由于对给定的观察点,镜像反射角  $\theta$  由源点决定。此方法既保证了一定的计算精度又极大地缩短了计算时间。计算结果表明利用反射系数近似法得到的结果与严格 Sommerfeld 积分法得到的结果相比,误差小于 10%,而计算时间只有 1%。文献<sup>[6]</sup>中进一步说明了反射系数近似法可利用最陡下降法从 Sommerfeld 积分法中直接得到,并表明反射系数近似法不是远场近似。

利用文献<sup>[7]</sup>中的方法,得出非理想导电地面上

的双位积分方程，并利用反射系数近似及矩量法，得出求解一般线天线的阻抗元素表达式。

## 2 自由空间的双位积分方程

某一线段在自由空间产生的电场可用磁矢量位  $A$  和电标量位  $V$  表示，考虑电流连续性方程以及在导线表面上的边界条件，可以得到电流双位积分方程：

$$\int_{S_1}^{S_2} \left[ I_{(S_p)} \hat{s}_i \cdot \hat{s}'_p + \frac{1}{k^2} \frac{dI_{(S_p)}}{ds'_p} \hat{s}_i \cdot \nabla \right] g_{(r_a)} ds' p = E^i \cdot \hat{s}_i \quad (1)$$

其中： $I_{(S_p)}$  是线段的电流强度，而  $r_a$  是场点  $P$  与线段表面之间的近似平均距离。 $\hat{s}_i, \hat{s}_p$  分别表示观察点上和源点上电流切向方向的单位矢量， $E^i$  为外加场。

在方程(1)的被积函数中，含有格林函数对空间坐标的一次导数，因此，方程(1)的核只有正比于  $1/r$  项和  $1/r$  的一阶导数项。由于  $1/r$  有时会很小，在所有积分方程中的核是伪奇异的，但方程(1)的伪奇异性的阶最低，较容易计算方程中碰到的积分，也较适用于数值计算。

## 3 非理想地面上的双位积分方程

假定某一电流元处在均匀有耗媒质平面之上的自由空间中，均匀媒质的磁导率为  $\mu$ ，相对介电常数为  $\epsilon_r$ ，电导率为  $\sigma$ ，此电流元产生的场为一球面波，由 Sommerfeld 的理论可知，此球面波可以认为是许多平面波的迭加。当平面波入射到地平面上时，将产生反射和透射。设入射电场为  $E^i$ ，其与地面法线成  $\theta$  角，反射电场为  $E'$ ，透射电场为  $E'$ ，它们分别与地面法线的夹角为  $\theta_r, \theta_t$ 。

假定一电流元  $Ids_p$ ，位于坐标  $(x', y', z')$ ，并且此电流元的指向分别与  $x$  轴和  $z$  轴的夹角为  $\alpha_p, \beta_p$ 。电流  $I$  可写为：

$$I = I(\sin\beta_p \cos\alpha_p \hat{x} + \sin\beta_p \sin\alpha_p \hat{y} + \cos\beta_p \hat{z}) \\ = I(\sin\beta_p \hat{p} + \cos\beta_p \hat{z})$$

设场点的方向与  $x$  轴和  $z$  轴的夹角分别为  $\alpha_i, \beta_i$ ，则有

$$\hat{s}_i = \sin\beta_i \cos\alpha_i \hat{x} + \sin\beta_i \sin\alpha_i \hat{y} + \cos\beta_i \hat{z}$$

可见，任意取向的电流元可分解为水平电流元与垂直电流元，利用文献<sup>[1]</sup>中的方法可得到水平电流元和垂直电流元的磁矢量位及电标量位的反射系数，从而得到在反射系数近似条件下，任意取向的电流

元所满足的双位积分方程为：

$$\int_{S_p} \left\{ \begin{aligned} & \{ I_{(S_p)} [\cos\beta_i \cos\beta_p + \sin\beta_i \sin\beta_p \cos(\alpha_i - \alpha_p)] g_0 + \\ & [R_V \cos\beta_i \cos\beta_p + R_h \sin\beta_i \sin\beta_p \cos(\alpha_i - \alpha_p) + \\ & \frac{1}{jk} (jk + \frac{1}{r_{ip}}) R_{hv} \cos\beta_i \sin\beta_p \cos(\psi_p - \alpha_p)] g_i + \\ & \frac{1}{k^2} \frac{dI_{(S_p)}}{ds_p} [(jk + \frac{1}{r_{ip}})(\hat{s}_i \cdot \hat{r}_{ip}) g_0 - (jk + \frac{1}{r_{ip}}) \\ & (\hat{s}_i \cdot \hat{r}'_{ip})(R_V \cos^2 \beta_p - R_E \sin^2 \beta_p) g_i] \} ds_p \\ & = \frac{\hat{s}_i \cdot E^i}{j\omega\mu} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中：

$$R_V = \frac{\epsilon_r \cos\theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}}{\epsilon_r \cos\theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}} \quad (3)$$

$$R_h = \frac{\cos\theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}} \quad (4)$$

$$R_{hv} = \frac{2 \sin\theta \cos\theta (\cos\theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta})}{\epsilon_r \cos\theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}} \quad (5)$$

$$R_E = R_h + R_{hv} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{(2 - \epsilon_r) \cos\theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}}{\epsilon_r \cos\theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}} \quad (6)$$

式中  $\hat{r}_{ip}, \hat{r}'_{ip}$  分别代表场点到源点及场点到源镜像点的单位矢量， $g_0, g_i$  分别表示上半空间的格林函数及源镜像点的格林函数。 $\psi_p$  为场点到源点的矢径与  $x$  轴的夹角。

上式中含  $g_0$  的项代表电流元在自由空间的产生的场，是直射场。含  $g_i$  的项为地面的反射场，其中含有  $\cos\beta_p$  的项可认为是垂直部分的贡献，含有  $\sin\beta_p$  的项则认为是水平部分的贡献。

### 3.1 双位积分方程的求解

式(2)为任一线元在地面上方所满足的双位积分方程，如果天线是由  $N$  条导线线段组成的，其上电流满足的双位积分方程可写为

$$\sum_{p=1}^N F(s_p) = \frac{E^i}{j\omega\mu} \quad (7)$$

其中， $F(s_p)$  表示式(2)的左边项，“ $i$ ”表示观察点，“ $p$ ”表示源点， $E^i$  为外加场在观察点的切向分量。

对方程(7)的求解，采用点匹配法求解。电流分布用分域多项式基展开。

将天线上每段的电流用幕级数展开，即

$$I_{p(S_p)} = \sum_{q=1}^{n_p} I_{pq} \left( \frac{s'_p}{l_p} \right)^{q-1} \quad p = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

$l_p$  为该段的长度,  $n_p$  为多项式的项数,  $n_p - 1$  则对应着第  $p$  段逼近电流分布的多项式的次数。一般取  $n_p \leq 4$ 。将(8)式代入(7)式, 并且选择合适的数目匹配点, 以保证天线在足够数目的匹配点上方程得到满足, 从而可得到一个可确定的线性方程组

$$\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} I_{pq} Z(s_i, p, q) = V(s_i) \quad (9)$$

这里

$$Z(s_i, p, q) = Z_0(s_i, p, q) + Z_i(s_i, p, q) \quad (10)$$

$$Z_0(s_i, p, q) = j\omega\mu \int_{\hat{s}'_p} \frac{(s'_p)^{q-2}}{(l_p)^{q-1}} [s'_p A_1 + \frac{q-1}{k^2} (jk + \frac{1}{r_{ip}}) (\hat{s}_i \cdot \hat{r}_{ip})] g_0 ds'_p \quad (11)$$

$$Z_i(s_i, p, q) = j\omega\mu \int_{\hat{s}'_p} \frac{(s'_p)^{q-2}}{(l_p)^{q-1}} \{ s'_p [R_v A_2 + R_h A_3 + (1 + \frac{1}{jkr_{ip}}) R_{hv} A_4 - \frac{q-1}{k^2} (jk + \frac{1}{r_{ip}}) (\hat{s}_i \cdot \hat{r}_{ip}) (R_v \cos^2 \beta_{ip} - R_E \sin^2 \beta_{ip})] g_i \} ds'_p \quad (12)$$

$$V(s_i) = E_i(s_i) \quad (13)$$

各参数由下列各式给出:

$$A_1 = \cos \beta_i \cos \beta'_p + \sin \beta_i \sin \beta'_p \cos(\alpha_i - \alpha'_{ip})$$

$$A_2 = \cos \beta_i \cos \beta'_p$$

$$A_3 = \sin \beta_i \sin \beta'_p \cos(\alpha_i - \alpha'_{ip})$$

$$A_4 = \cos \beta_i \sin \beta'_p \cos(\psi_p - \alpha'_{ip})$$

$$r_{ip} = [(x'_p - x_i)^2 + (y'_p - y_i)^2 + (z'_p - z_i)^2]^{1/2}$$

$$r'_{ip} = [(x'_p - x_i)^2 + (y'_p - y_i)^2 + (z'_p + z_i)^2]^{1/2}$$

$$\psi_p = \operatorname{arctg} \frac{y_i - y'_p}{x_i - x'_p}$$

$$\hat{r}_{ip} = \frac{x'_p - x_i}{r_{ip}} \hat{x} + \frac{y'_p - y_i}{r_{ip}} \hat{y} + \frac{z'_p - z_i}{r_{ip}} \hat{z}$$

$$\hat{r}'_{ip} = \frac{x'_p - x_i}{r_{ip}} \hat{x} + \frac{y'_p - y_i}{r_{ip}} \hat{y} - \frac{z'_p + z_i}{r_{ip}} \hat{z}$$

$Z(s_i, p, q), V(s_i)$  分别称为广义阻抗及广义电压。

因此对积分方程(7)的求解就化为对线性方程组(9)的求解。而方程(9)可转化为下列矩阵方程

$$Z \cdot I = V \quad (14)$$

求解该矩阵方程可求得电流系数  $I_{pq}$ , 亦即求得了天线上的分布电流, 进一步可得到天线的其它电特性。

### 3.2 积分核的加快收敛

式(11)中包含有对  $g_0$  的积分, 由于当观察点和源点在同一线段上时

$$r_{ip} = [(s'_p - s_i)^2 + a^2]^{1/2}$$

当  $s'_p \rightarrow s_i$  时  $r_{ip}$  趋于  $a$  是一个很小的值。因此对  $g_0$  的积分存在着可去奇异点。在这点积分收敛很慢。为了加快收敛速度, 将  $e^{-jkr/r}$  展开为级数形式, 并考虑第一项, 其包含有奇异性。从而将(11)式对  $g_0$  的积分可以写为下面形式:

$$Z_0(s_i, p, q) = j\omega\mu \int_{\hat{s}'_p} \frac{(s'_p)^{q-2}}{(l_p)^{q-1}} [s'_p A_1 + \frac{q-1}{k^2} (jk + \frac{1}{r_{ip}}) (\hat{s}_i \cdot \hat{r}_{ip})] \frac{1}{r_{ip}} ds'_p + j\omega\mu \int_{\hat{s}'_p} \frac{(s'_p)^{q-2}}{(l_p)^{q-1}} [s'_p A_1 + \frac{q-1}{k^2} (jk + \frac{1}{r_{ip}}) (\hat{s}_i \cdot \hat{r}_{ip})] \frac{e^{-jkr_{ip}} - 1}{r_{ip}} ds'_p \quad (15)$$

在上式的第一个积分可以直接解析出来, 而第二个积分是收敛很快的。

## 4 算例与分析

按照以上理论, 首先, 对地面上偶极子的输入阻抗特性进行了分析, 计算的半波振子的工作频率为 3MHz, 地面的相对介电参数为 10, 天线中心离地面的高度为  $h$ , 天线计算的激励模型采用带状发生器模型。图 1 表示  $\lambda/2$  垂直偶极子输入电阻在地面上不同高度时的随电导率  $\sigma$  的变化。图 2 表示  $\lambda/2$  水平偶极子输入电阻在地面上不同高度时的随电导率  $\sigma$  的变化。该结果与文献<sup>[4,5]</sup>所得的结果是一致的。

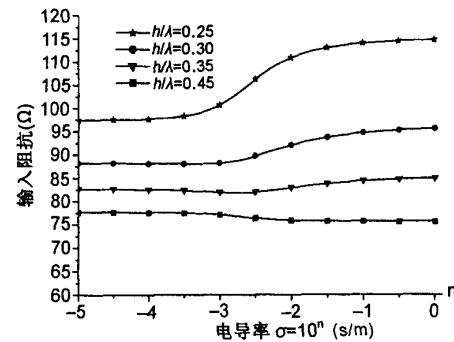


图 1 地面上垂直偶极子输入电阻随电导率的变化

考虑工程应用, 分析了 76m 高的中波天线的输入阻抗特性并与文献<sup>[8]</sup>所给的测试值进行了比较, 考虑中波天线一般铺设有较大的地网, 地面电导率较平常地面提高许多, 为此, 计算时取地面电参数

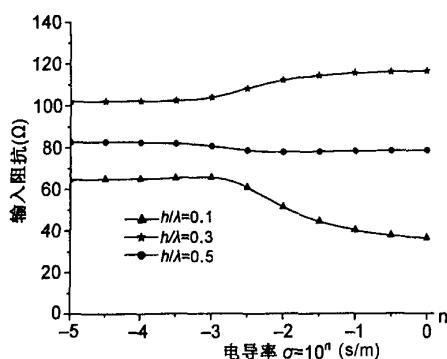


图2 地面上水平偶极子输入电阻随电导率的变化为:  $\epsilon_r=30$ ,  $\sigma=1.0\text{ s/m}$ , 天线采用边宽  $a$  为  $0.5\text{ m}$  三角形铁塔, 其等效半径为  $0.243a^{[9]}$ , 天线输入阻抗计算结果见图3、图4。

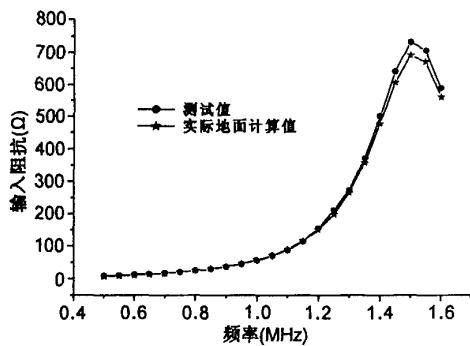


图3 单极天线输入电阻计算与实测结果

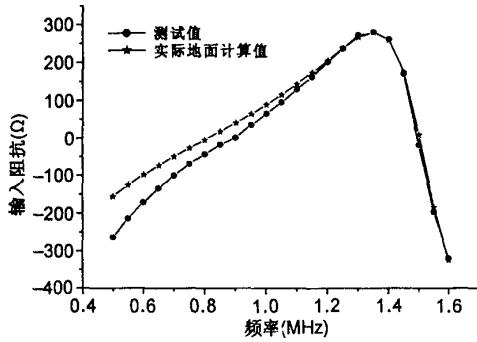


图4 单极天线输入电抗计算与实测结果

由此可见该方法计算结果与实际测试情况较吻合, 输入电阻与实测值误差较小, 在并联谐振点附近, 由于电阻变化剧烈, 其计算误差较大。输入电抗的误差随着频率的加大逐渐减小。

## 5 结论

地面上天线的性能计算是中、短波天线工程设  
万方数据

计中一个重要课题。本文研究了地面上的双位积分方程及其求解, 通过采用矩量法得出任意线天线的广义阻抗元素, 实际计算结果证实了该方法的有效性, 表明其对工程设计具有较大的指导意义。

## 参考文献

- [1] 谢处方等. 加载与媒质中天线 [M]. 电子科大出版社, 1990.
- [2] C T Tai. Dyadic Green's functions in electromagnetic theory [M]. Intext Educational Publishers , Scranton, Pa, 1990.
- [3] Y-S Jin, S Adachi, and K Sawaya. Monopole antenna on radial-Wires over flat earth[J]. J. EMA, 1990, 4(1): 49 ~59.
- [4] E K Miller, A J Poggio, G J Burke, And E S Selden. Analysis of wire antennas in the presence of a conducting half-space . part I . The vertical antenna in free space [J]. Canadian Journal of Physics, 1972, 50(9): 879 ~888
- [5] E K Miller, A J Poggio, G J Burke, et al.. Analysis of wire antennas in the presence of a conducting half-space . part II . The horizontal antenna in free space [J]. Canadian Journal of Physics, 1972, 50(21): 2614 ~2622.
- [6] T K Sarkar. Analysis of arbitrarily oriented thin wire antennas over a plane imperfect ground [J]. AEU, 1977, 31(11): 449 ~457.
- [7] B D Popovic, M B dragovic And A R Djordjević. Analysis and synthesis of wire antennas [M]. Research Studies Press, England 1982.
- [8] 褚国桢. 中波天线输入阻抗计算机分析 [J]. 电波科学学报, 2002, 17(2): 197 ~203.  
G Z Chu. Analysis of input impedance of medium wave antenna with computer [J]. Chinese Journal of Radio Science, 2002, 17(2): 197 ~203.
- [9] 周朝栋, 王元坤, 周良明. 线天线理论与工程 [M]. 西安电子科技大学出版社, 1988.

何绍林 (1967—), 男, 安徽人, 中国电波传播研究所高级工程师, 主要从事计算电磁场以及天线理论和工程方面的研究工作。

金元松 (1941—), 男(朝鲜族), 吉林人, 中国电波传播研究所研究员, 主要从事电磁场理论和天线设计工作。

邓冀云 (1957—), 女, 山西人, 中国电波传播研究所高级工程师, 主要从事天线设计工作。

## 如何学习天线设计

天线设计理论晦涩高深，让许多工程师望而却步，然而实际工程或实际工作中在设计天线时却很少用到这些高深晦涩的理论。实际上，我们只需要懂得最基本的天线和射频基础知识，借助于 HFSS、CST 软件或者测试仪器就可以设计出工作性能良好的各类天线。

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))专注于微波射频和天线设计人才的培养，推出了一系列天线设计培训视频课程。我们的视频培训课程，化繁为简，直观易学，可以帮助您快速学习掌握天线设计的真谛，让天线设计不再难…

---



### HFSS 天线设计培训课程套装

套装包含 6 门视频课程和 1 本图书，课程从基础讲起，内容由浅入深，理论介绍和实际操作讲解相结合，全面系统的讲解了 HFSS 天线设计的全过程。是国内最全面、最专业的 HFSS 天线设计课程，可以帮助你快速学习掌握如何使用 HFSS 软件进行天线设计，让天线设计不再难…

课程网址: <http://www.edatop.com/peixun/hfss/122.html>

---

### CST 天线设计视频培训课程套装

套装包含 5 门视频培训课程，由经验丰富的专家授课，旨在帮助您从零开始，全面系统地学习掌握 CST 微波工作室的功能应用和使用 CST 微波工作室进行天线设计实际过程和具体操作。视频课程，边操作边讲解，直观易学；购买套装同时赠送 3 个月在线答疑，帮您解答学习中遇到的问题，让您学习无忧。

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/cst/127.html>

---



### 13.56MHz NFC/RFID 线圈天线设计培训课程套装

套装包含 4 门视频培训课程，培训将 13.56MHz 线圈天线设计原理和仿真设计实践相结合，全面系统地讲解了 13.56MHz 线圈天线的工作原理、设计方法、设计考量以及使用 HFSS 和 CST 仿真分析线圈天线的具体操作，同时还介绍了 13.56MHz 线圈天线匹配电路的设计和调试。通过该套课程的学习，可以帮助您快速学习掌握 13.56MHz 线圈天线及其匹配电路的原理、设计和调试…

详情浏览: <http://www.edatop.com/peixun/antenna/116.html>

---



## 关于易迪拓培训:

易迪拓培训([www.edatop.com](http://www.edatop.com))由数名来自于研发第一线的资深工程师发起成立，一直致力于专注于微波、射频、天线设计研发人才的培养；后于 2006 年整合合并微波 EDA 网([www.mweda.com](http://www.mweda.com))，现已发展成为国内最大的微波射频和天线设计人才培养基地，成功推出多套微波射频以及天线设计经典培训课程和 **ADS**、**HFSS** 等专业软件使用培训课程，广受客户好评；并先后与人民邮电出版社、电子工业出版社合作出版了多本专业图书，帮助数万名工程师提升了专业技术能力。客户遍布中兴通讯、研通高频、埃威航电、国人通信等多家国内知名公司，以及台湾工业技术研究院、永业科技、全一电子等多家台湾地区企业。

## 我们的课程优势:

- ※ 成立于 2004 年，10 多年丰富的行业经验
- ※ 一直专注于微波射频和天线设计工程师的培养，更了解该行业对人才的要求
- ※ 视频课程、既能达到了现场培训的效果，又能免除您舟车劳顿的辛苦，学习工作两不误
- ※ 经验丰富的一线资深工程师主讲，结合实际工程案例，直观、实用、易学

## 联系我们:

- ※ 易迪拓培训官网: <http://www.edatop.com>
- ※ 微波 EDA 网: <http://www.mweda.com>
- ※ 官方淘宝店: <http://shop36920890.taobao.com>