工程电磁场数值计算
Numerical Techniques in Eletromagnetics

李旭光
上海交通大学 电子信息与电气工程学院
电气工程系　电机与电器教研室

数值积分方法

1. 概述
2. 数值积分
3. 基于场量积分公式的数值积分法
4. 基于场源离散化的数值积分方法

数值积分简介

- 数值积分法是数值计算方法应用中的基本内容之一。
- 在电磁场分析计算中，对于无限大、均匀各向同性的媒质，当已知场源分布求场分布时，基于库仑定律或比奥—沙伐定律均可以导出关于场量、位函数的积分表达式。可以计算场分布以及有关电磁参数、能量和力等积分量。
- 它是多种电磁场数值计算方法（等参数有限元法、边界元法和模拟电荷法）数值解的必要基础。

数值积分实质之一

- 数值积分实质上是一种近似的求积方法，即通过构造被积函数的某种线性组合的逼近函数来近似求其积分值。
- 如函数$f(x)$的定积分$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$，当被积函数$f(x)$的原函数$F(x)$无法用初等函数表达，则可以用另一个具有足够逼近精度的简单函数$g(x)$来近似替代函数$f(x)$，函数$g(x)$的构造通常取$f(x)$的代数插值函数或样条函数。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$$

数值积分实质之二

- 函数$g(x)$不同的构造函数，产生不同的数值求积公式。
- 为提高数值积分精度，常将积分空间分成n等份，在每个小区间上采用相应的求积公式计算，称为复合的数值求积公式。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(x)dx$$

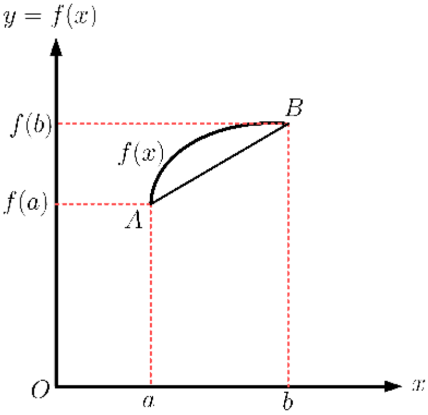

图 1: 梯形积分公式示意图

梯形积分公式之一

- 梯形求积是一种直观的近似方法，由边界上近似直线围成的梯形面积近似代替原来曲边梯形面积。

$$T_1 = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$

- 上面误差较大，为得到求积的精度，可将积分区间细分k次，得到分段数$n = 2^k$，其梯形积分公式为：

$$T_2 = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2f(a+h)]$$

$$\cdots\cdots$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

梯形积分公式之二

- 如果精度不够，再各子区间平分，得$2n = 2^{k+1}$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+h/2})$$

- 当满足：

$$T_{2n} - T_n < \varepsilon$$

辛普生积分公式之一

- 如用二次插值多项式，即抛物线$g(x)$所围成的曲边梯形面积近似代替$y = f(x)$围成的曲边梯形面积

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a) + f(b) + 4f(\frac{a+b}{2})\right]$$

- 为得到较高的求积精度，可将积分区间细分k次，得到分段数$n = 2^k$，其复合辛普生积分公式为：

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + 4f(x_i + h/2) + f(x_{i+1})]$$

辛普生积分公式之二

- 计算二重积分时，数值积分的处理是将二重积分分解为两个单积分，每个积分使用辛普生求积公式，即在第一重积分内采用辛普生求积公式，公式中每产生一个固定某变量值x，在另一重积分也用辛普生求积公式计算。

$$S = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

- 分解为两个单积分：

$$g(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

$$S = \int_a^b g(x)dx$$

高斯积分公式之一

- 高斯求积法，在积分区间，选择某些积分点（设为n个积分点），计算出函数在这些积分点上的数值，然后用相应的权系数乘以这些函数值，并求和。

- 在相同数量积分点的选取条件下，高斯积分的精度最佳。

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx$$

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

- 求积节点$x_k (k = 1, 2, \cdots, n)$为高斯积分点。$\rho(x)$称为积分区间$[a, b]$上的权函数，不同的权函数选取，不同的高斯型求积公式，其中$\rho(x) = 1$是最常用的权函数。

高斯积分公式之二

- 当给定权函数$\rho(x) = 1$，可假定积分区间为$[-1, 1]$，利用正交多项式来确定求积点（高斯积分点）时，该正交多项式为勒让德多项式，这样积分点为n次勒让德多项式的n个零点，由此得到相应的求积公式的权系数A_k。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

- 上式为高斯-勒让德求积公式。高斯积分点与权系数的值有参考表依据。

高斯积分公式之三

- 对于一般区间$[a, b]$，利用积分变量代换，转换为$[-1, 1]$积分区间。

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2})dt$$

$$\approx B\sum_{k=1}^{n} A_k f(\frac{b-a}{2}t_k + \frac{b+a}{2})$$

$$B = \frac{b-a}{2}$$

高斯积分公式之四

- 对于多重积分，可以化重积分为多次积分的方法，与前面辛普生的多重积分相似，每一重积分采用相同或不同的高斯积分点

$$\int_{x1}^{x2}\int_{y1}^{y2} f(x,y)dxdy = B_1B_2\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=1}^{n2} A_iA_jf(x_i,y_j)$$

$$\int_{x1}^{x2}\int_{y1}^{y2}\int_{z1}^{z2} f(x,y,z)dxdydz = B_1B_2B_3\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=1}^{n2}\sum_{k=1}^{n3} A_iA_jA_kf(x_i,y_j,z_k)$$

- 在电磁场的数值计算中，椭圆积分的应用广泛。应用较多的是第一与第二类椭圆积分。以下公式中k称为积分模数$k^2 < 1$。
- 第一类完全椭圆积分:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}$$

- 第二类完全椭圆积分:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta$$

- 椭圆积分一般计算方法有级数展开式法和算术平均值法。

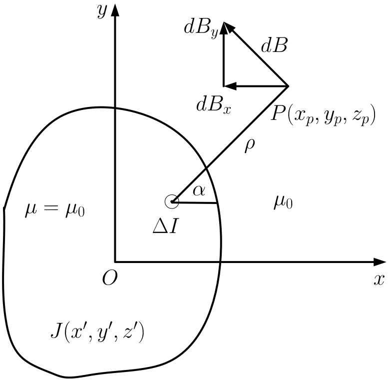

图 2: 任意截面长直载流导体中元电流产生的磁场

任意点处的磁场分布

$$
\begin{aligned}
dA = dA_z e_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{\Delta I dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \vec{a}_z \\
&= \frac{\mu_0 \Delta I}{2\pi} \left[\ln(L + \sqrt{L^2 + \rho^2}) - \ln \rho \right] \\
&\approx \frac{\mu_0 \Delta I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho}
\end{aligned}
$$

$$
A = \int dA = \int_S \left(-\frac{\mu_0 \Delta I}{2\pi} \ln \rho + C \right) dS \vec{a}_z
$$

$$
C = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln 2L
$$

场图的绘制

$$\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$$

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow dA = 0 \Rightarrow A = C$$

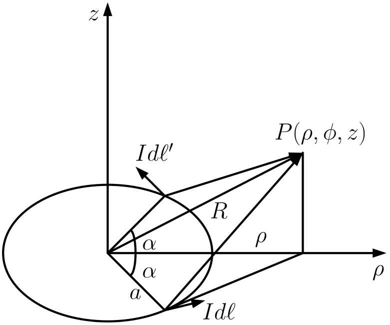

图 3: 环形载流线圈

环形线电流的磁场

$$dA_p = 2\left(\frac{\mu_0 I dl}{4\pi R}\cos\alpha\right)\vec{a}_\phi$$

$$A_p = \int dA_p = \frac{a\mu_0 I}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\alpha}{R}d\alpha\vec{a}_\phi$$

- 场源的离散化
- 电流源激励的磁场
- 电压源激励的磁场
    - 螺线管线圈的电感
    - 螺线管线圈的电阻
    - 螺线管线圈的磁场

课件和参考资料下载

- 课件和参考资料下载地址 `ftp://public.sjtu.edu.cn`
- 用户名：lixg
- 密码：public

课件和参考资料下载

- 课件和参考资料下载地址
  `ftp://public.sjtu.edu.cn`
- 用户名：lixg
- 密码：public

课件和参考资料下载

- 课件和参考资料下载地址
  ftp://public.sjtu.edu.cn
- 用户名：lixg
- 密码：public

THANK YOU!

AUTHOR: Xu Guang Li
ADDRESS: Electric Machine and Equipment
Department of Electrical Engineering
School of EIEE
Shanghai Jiao Tong University
Shanghai, 200240, China
EMAIL: LIXG❄SJTU.EDU.CN