

阻抗匹配与史密斯(Smith)圆图的基本原理

摘要:

本文利用史密斯圆图作为 RF 阻抗匹配的设计指南。文中给出了反射系数、阻抗和导纳的作图范例，并用作图法设计了一个频率为 60MHz 的匹配网络。

实践证明：史密斯圆图仍然是计算传输线阻抗的基本工具。

在处理 RF 系统的实际应用问题时，总会遇到一些非常困难的工作，对各部分级联电路的不同阻抗进行匹配就是其中之一。一般情况下，需要进行匹配的电路包括天线与低噪声放大器(LNA)之间的匹配、功率放大器输出(RFOUT)与天线之间的匹配、LNA/VCO 输出与混频器输入之间的匹配。匹配的目的在于保证信号或能量有效地从“信号源”传送到“负载”。

在高频端，寄生元件(比如连线上的电感、板层之间的电容和导体的电阻)对匹配网络具有明显的、不可预知的影响。频率在数十兆赫兹以上时，理论计算和仿真已经远远不能满足要求，为了得到适当的最终结果，还必须考虑在实验室中进行的 RF 测试、并进行适当调谐。需要用计算值确定电路的结构类型和相应的目标元件值。

有很多种阻抗匹配的方法，包括:

- 计算机仿真:由于这类软件是为不同功能设计的而不只是用于阻抗匹配，所以使用起来比较复杂。设计者必须熟悉用正确的格式输入众多的数据。设计人员还需要具有从大量的输出结果中找到有用数据的技能。另外，除非计算机是专门为这个用途制造的，否则电路仿真软件不可能预装在计算机上。

- 手工计算:这是一种极其繁琐的方法，因为需要用到较长(“几公里”)的计算公式、并且被处理的数据多为复数。

- 经验:只有在 RF 领域工作过多年的人才能使用这种方法。总之，它只适合于资深的专家。

- 史密斯圆图:本文要重点讨论的内容。

本文的主要目的是复习史密斯圆图的结构和背景知识，并且总结它在实际中的应用方法。讨论的主题包括参数的实际范例，比如找出匹配网络元件的数值。当然，史密斯圆图不仅能够为我们找出最大功率传输的匹配网络，还能帮助设计者优化噪声系数，确定品质因数的影响以及进行稳定性分析。

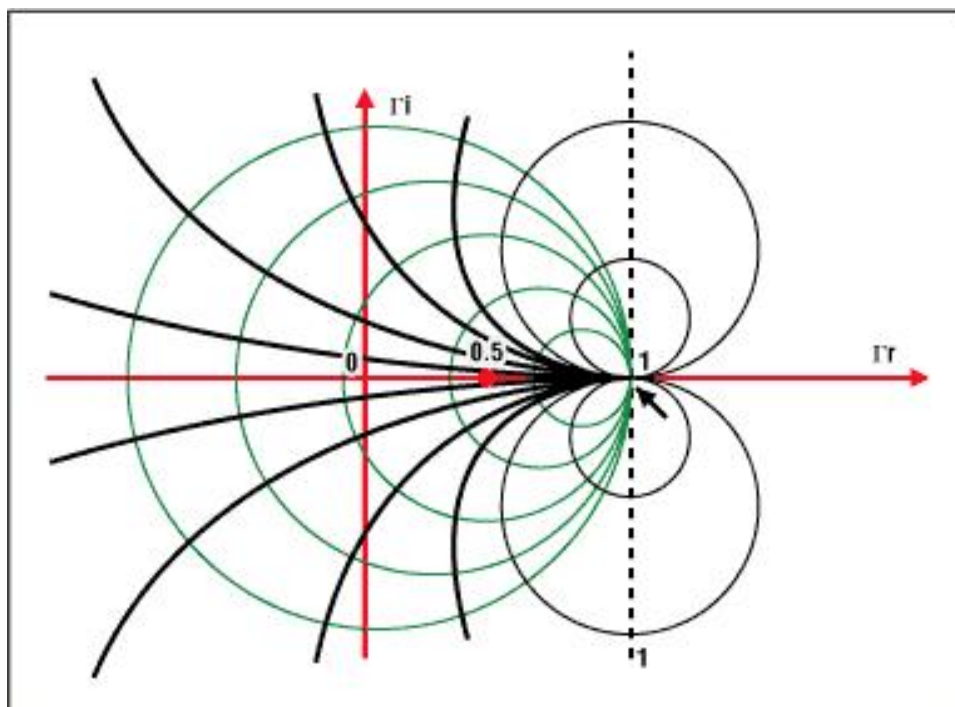


图 1. 阻抗和史密斯圆图基础

基础知识

在介绍史密斯圆图的使用之前，最好回顾一下 RF 环境下(大于 100MHz) IC 连线的电磁波传播现象。这对 RS-485 传输线、PA 和天线之间的连接、LNA 和下变频器/混频器之间的连接等应用都是有效的。

大家都知道，要使信号源传送到负载的功率最大，信号源阻抗必须等于负载的共轭阻抗，即：

$$R_S + jX_S = R_L - jX_L$$

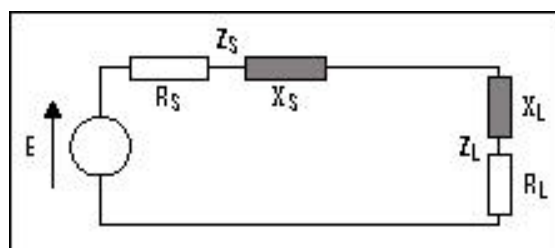


图 2. 表达式 $R_S + jX_S = R_L - jX_L$ 的等效图

在这个条件下，从信号源到负载传输的能量最大。另外，为有效传输功率，满足这个条件可以避免能量从负载反射到信号源，尤其是在诸如视频传输、RF 或微波网络的高频应用环境更是如此。

史密斯圆图

史密斯圆图是由很多圆周交织在一起的一个图。正确的使用它，可以在不作任何计算的前提下得到一个表面上看非常复杂的系统的匹配阻抗，唯一需要作的就是沿着圆周线读取并跟踪数据。

史密斯圆图是反射系数(伽马，以符号 Γ 表示)的极坐标图。反射系数也可以从数学上定义为单端口散射参数，即 S_{11} 。

史密斯圆图是通过验证阻抗匹配的负载产生的。这里我们不直接考虑阻抗，而是用反射系数 Γ_L ，反射系数可以反映负载的特性(如导纳、增益、跨导)，在处理RF频率的问题时 Γ_L 更加有用。

我们知道反射系数定义为反射波电压与入射波电压之比:

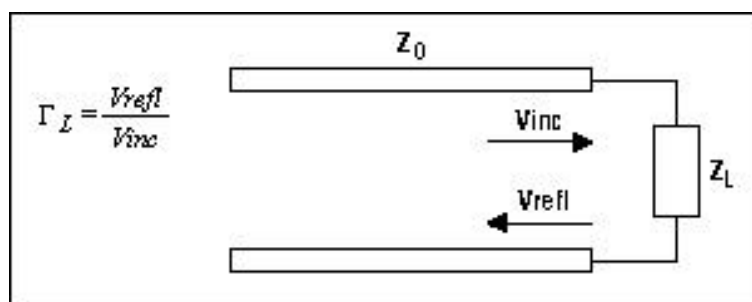


图 3. 负载阻抗

负载反射信号的强度取决于信号源阻抗与负载阻抗的失配程度。反射系数的表达式定义为:

$$\Gamma_L = \frac{V_{refl}}{V_{inc}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \Gamma_r + j \cdot \Gamma_i \quad (\text{equ 2.1}) \quad [1]$$

由于阻抗是复数，反射系数也是复数。

为了减少未知参数的数量，可以固化一个经常出现并且在应用中经常使用的参数。这里 Z_0 (特性阻抗)通常为常数并且是实数，是常用的归一化标准值，如 50Ω 、 75Ω 、 100Ω 和 600Ω 。于是我们可以定义归一化的负载阻抗:

$$z = Z_L / Z_0 = (R + jX) / Z_0 = r + jx \quad (\text{equ 2.2})$$

据此，将反射系数的公式重新写为：

$$\Gamma_L = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(Z_L - Z_0)/Z_0}{(Z_L + Z_0)/Z_0} = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1} \quad (\text{equ 2.3})$$

从上式我们可以看到负载阻抗与其反射系数间的直接关系。但是这个关系式是一个复数，所以并不实用。我们可以把史密斯圆图当作上述方程的图形表示。

为了建立圆图，方程必需重新整理以符合标准几何图形的形式(如圆或射线)。

首先，由方程 2.3 求解出：

$$z = r + jx = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i} \quad (\text{equ 2.4})$$

并且

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{1 + \Gamma_r^2 - 2\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad (\text{equ 2.5})$$

令等式 2.5 的实部和虚部相等，得到两个独立的关系式：

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{1 + \Gamma_r^2 - 2\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad (\text{equ 2.6})$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{1 + \Gamma_r^2 - 2\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad (\text{equ 2.7})$$

重新整理等式 2.6，经过等式 2.8 至 2.13 得到最终的方程 2.14。这个方程是在复平面(Γ_r , Γ_i)上、圆的参数方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ，它以 $(r/r+1, 0)$ 为圆心，半径为 $1/1+r$ 。

$$r + r.\Gamma_r^2 - 2.r.\Gamma_r + r.\Gamma_i^2 = 1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2 \quad (\text{equ 2.8})$$

$$\Gamma_r^2 + r.\Gamma_r^2 - 2.r.\Gamma_r + r.\Gamma_i^2 + \Gamma_i^2 = 1 - r \quad (\text{equ 2.9})$$

$$(1+r).\Gamma_r^2 - 2.r.\Gamma_r + (r+1).\Gamma_i^2 = 1 - r \quad (\text{equ 2.10})$$

$$\Gamma_r^2 - \frac{2.r}{r+1}.\Gamma_r + \Gamma_i^2 = \frac{1-r}{1+r} \quad (\text{equ 2.11})$$

$$\Gamma_r^2 - \frac{2.r}{r+1}.\Gamma_r + \frac{r^2}{(r+1)^2} + \Gamma_i^2 - \frac{r^2}{(r+1)^2} = \frac{1-r}{1+r} \quad (\text{equ 2.12})$$

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{r+1}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \frac{1-r}{1+r} + \frac{r^2}{(1+r)^2} = \frac{1}{(1+r)^2} \quad (\text{equ 2.13})$$

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{r+1}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad (\text{equ 2.14})$$

更多细节参见图 4a。

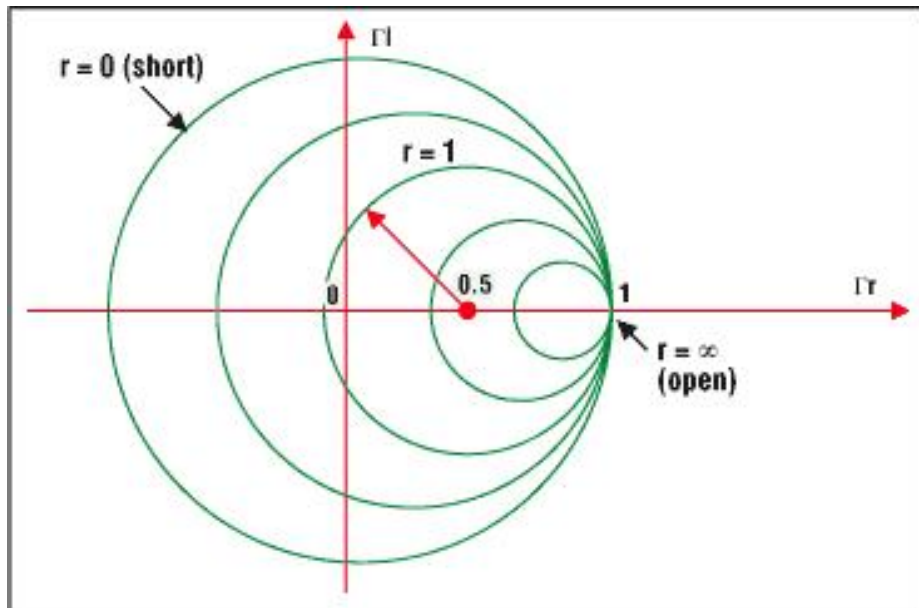


图 4a.

圆周上的点表示具有相同实部的阻抗。^[2]例如, $r=1$ 的圆, 以 $(0.5, 0)$ 为圆心, 半径为 0.5 。它包含了代表反射零点的原点 $(0, 0)$ (负载与特性阻抗相匹配)^[3]。以 $(0, 0)$ 为圆心、半径为 1 的圆代表负载短路。负载开路时, 圆退化为一个点(以 $1, 0$ 为圆心, 半径为零)。与此对应的是最大的反射系数 1 , 即所有的入射波都被反射回来。

在作史密斯圆图时, 有一些需要注意的问题。下面是最重要的几个方面:

- 所有的圆周只有一个相同的, 唯一的交点 $(1, 0)$ 。

- 代表 0Ω 、也就是没有电阻($r = 0$)的圆是最大的圆。
- 实际中没有负的电阻，如果出现负阻值，有可能产生振荡。
- 选择一个对应于新电阻值的圆周就等于选择了一个新的电阻。

作图

经过等式 2.15 至 2.18 的变换，2.7 式可以推导出另一个参数方程，方程 2.19。

$$x + x.\Gamma_r^2 - 2.x.\Gamma_r + x.\Gamma_i^2 = 2.\Gamma_i \quad (\text{equ 2.15})$$

$$1 + \Gamma_r^2 - 2.\Gamma_r + \Gamma_i^2 = 2.\Gamma_i / x \quad (\text{equ 2.16})$$

$$\Gamma_r^2 - 2.\Gamma_r + 1 + \Gamma_i^2 - \frac{2}{x}\Gamma_i = 0 \quad (\text{equ 2.17})$$

$$\Gamma_r^2 - 2.\Gamma_r + 1 + \Gamma_i^2 - \frac{2}{x}\Gamma_i + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \quad (\text{equ 2.18})$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i - \frac{1}{x})^2 = \frac{1}{x^2} \quad (\text{equ 2.19})$$

同样,2.19 也是在复平面(Γ_r, Γ_i)上的圆的参数方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$,它的圆心为 $(1, 1/x)$,半径 $1/x$ 。

更多细节参见图 4b。

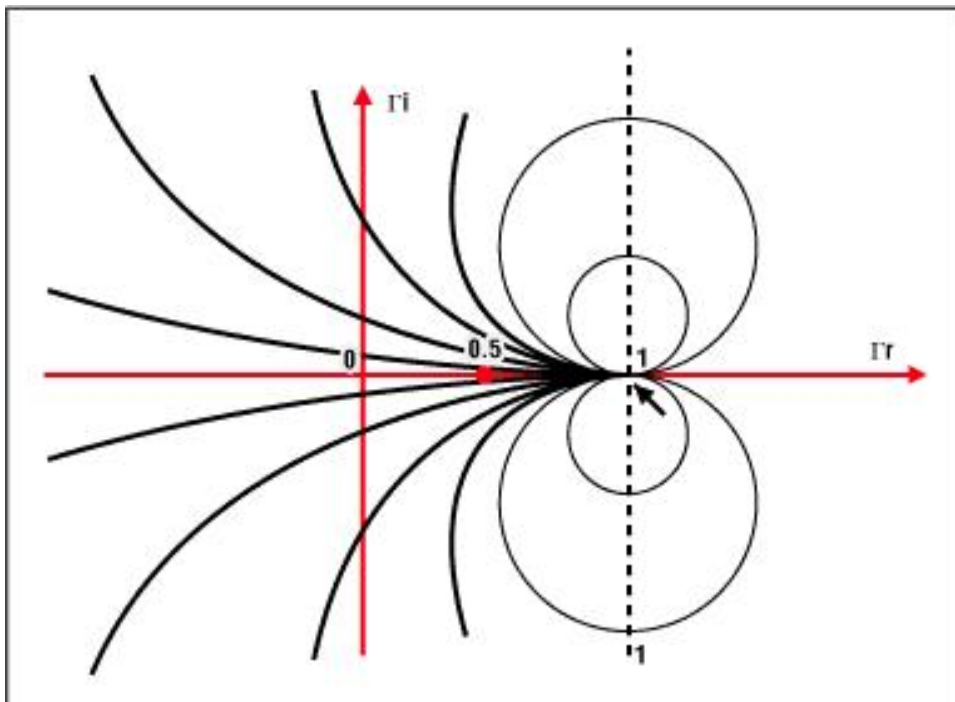


图 4b.

圆周上的点表示具有相同虚部 x 的阻抗。例如， $x=1$ 的圆以 $(1, 1)$ 为圆心，半径为 1。所有的圆 (x 为常数) 都包括点 $(1, 0)$ 。与实部圆周不同的是， x 既可以是正数也可以是负数。这说明复平面下半部是其上半部的镜像。所有圆的圆心都在一条经过横轴上 1 点的垂直线上。

完成圆图

为了完成史密斯圆图，我们将两簇圆周放在一起。可以发现一簇圆周的所有圆会与另一簇圆周的所有圆相交。若已知阻抗为 $r + jx$ ，只需要找到对应于 r 和 x 的两个圆周的交点就可以得到相应的反射系数。

可互换性

上述过程是可逆的，如果已知反射系数，可以找到两个圆周的交点从而读取相应的 r 和 x 的值。过程如下：

1. 确定阻抗在史密斯圆图上的对应点
2. 找到与此阻抗对应的反射系数(Γ)
3. 已知特性阻抗和 Γ ，找出阻抗
4. 将阻抗转换为导纳
5. 找出等效的阻抗
6. 找出与反射系数对应的元件值(尤其是匹配网络的元件，见图 7)

推论

因为史密斯圆图是一种基于图形的解法，所得结果的精确度直接依赖于图形的精度。下面是一个用史密斯圆图表示的 RF 应用实例：

例:已知特性阻抗为 50Ω ，负载阻抗如下：

$$Z_1 = 100 + j50\Omega \quad Z_2 = 75 - j100\Omega \quad Z_3 = j200\Omega \quad Z_4 = 150\Omega$$

$$Z_5 = \infty \text{ (开路)} \quad Z_6 = 0 \text{ (短路)} \quad Z_7 = 50\Omega \quad Z_8 = 184 - j900\Omega$$

对上面的值进行归一化并标示在圆图中(见图 5)：

$$z_1 = 2 + j \quad z_2 = 1.5 - j2 \quad z_3 = j4 \quad z_4 = 3$$

$$z_5 = 8 \quad z_6 = 0 \quad z_7 = 1 \quad z_8 = 3.68 - j18S$$

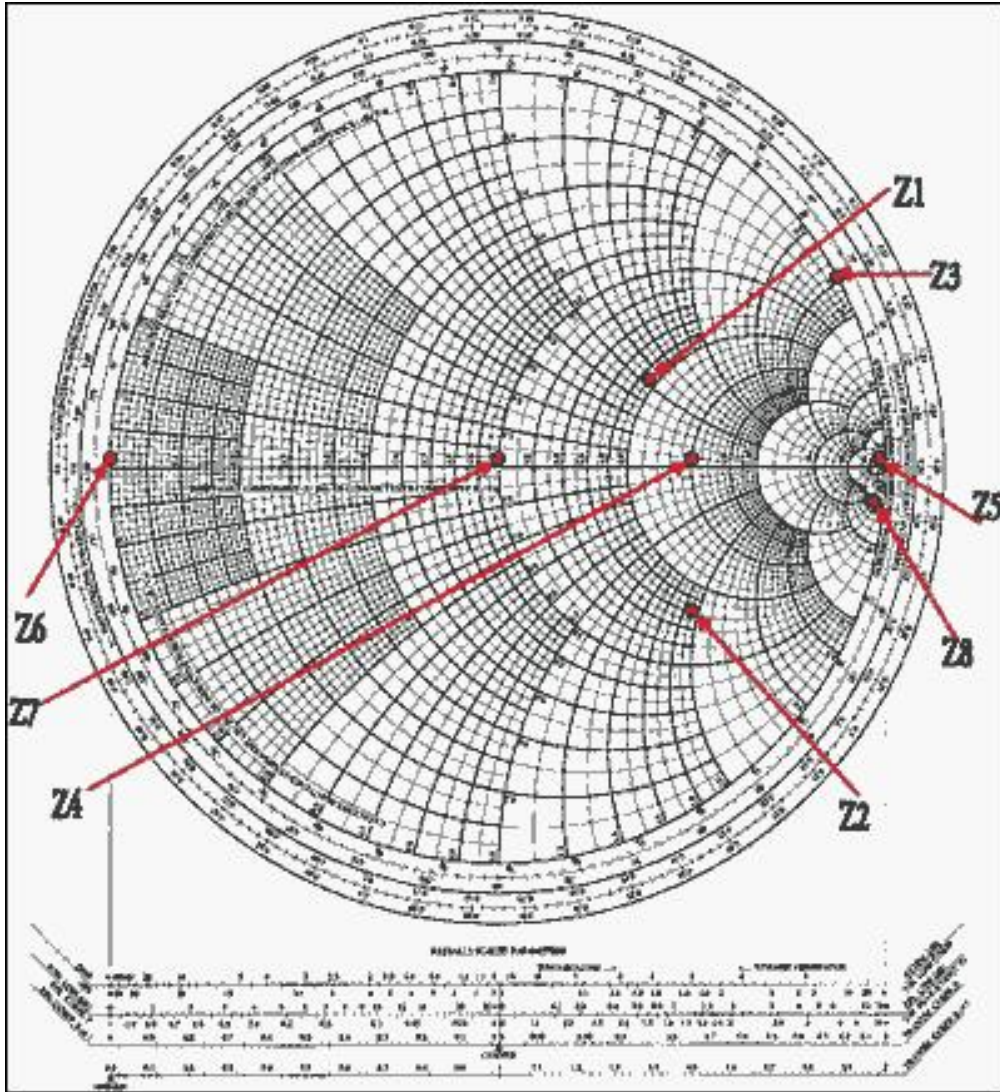


图 5. 史密斯圆图上的点

现在可以通过图 5 的圆图直接解出反射系数 Γ 。画出阻抗点(等阻抗圆和等电抗圆的交点), 只要读出它们在直角坐标水平轴和垂直轴上的投影, 就得到了反射系数的实部 Γ_r 和虚部 Γ_i (见图 6)。

该范例中可能存在八种情况, 在图 6 所示史密斯圆图上可以直接得到对应的反射系数 Γ :

$$\Gamma_1 = 0.4 + 0.2j \quad \Gamma_2 = 0.51 - 0.4j \quad \Gamma_3 = 0.875 + 0.48j \quad \Gamma_4 = 0.5$$

$$\Gamma_5 = 1 \quad \Gamma_6 = -1 \quad \Gamma_7 = 0 \quad \Gamma_8 = 0.96 - 0.1j$$

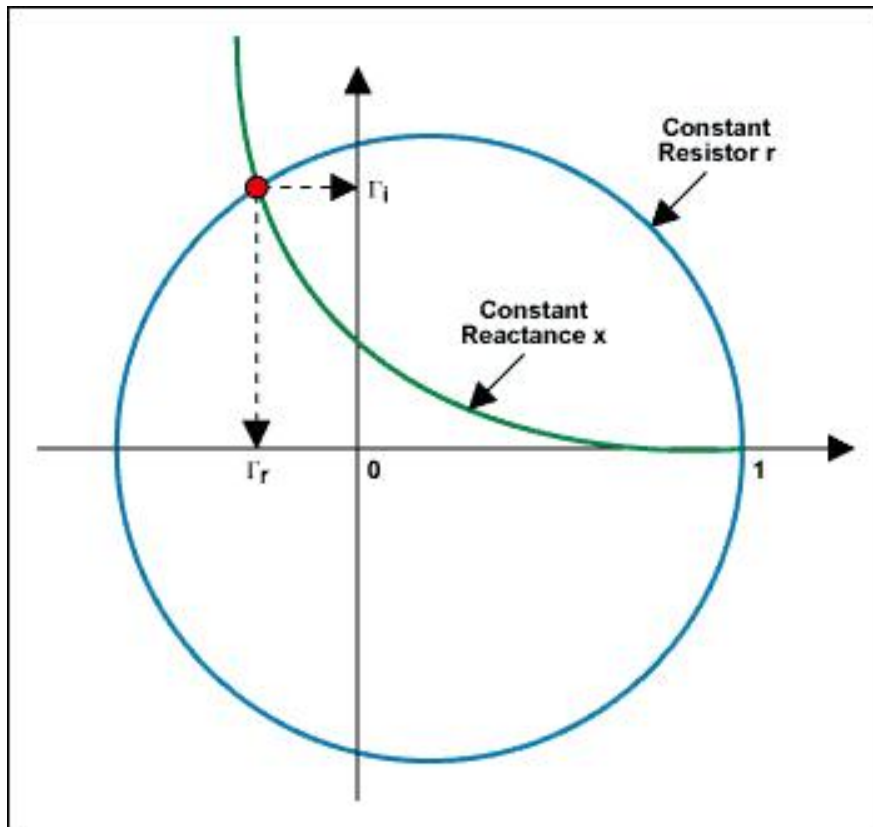


图 6. 从 X-Y 轴直接读出反射系数 Γ 的实部和虚部

用导纳表示

史密斯圆图是用阻抗(电阻和电抗)建立的。一旦作出了史密斯圆图,就可以用它分析串联和并联情况下的参数。可以添加新的串联元件,确定新增元件的影响只需沿着圆周移动到它们相应的数值即可。然而,增加并联元件时分析过程就不是这么简单了,需要考虑其它的参数。通常,利用导纳更容易处理并联元件。

我们知道,根据定义 $Y = 1/Z$, $Z = 1/Y$ 。导纳的单位是姆欧或者 Ω^{-1} (早些时候导纳的单位是西门子或 S)。并且,如果 Z 是复数,则 Y 也一定是复数。

所以 $Y = G + jB$ (2.20), 其中 G 叫作元件的“电导”, B 称“电纳”。在演算的时候应该小心谨慎,按照似乎合乎逻辑的假设,可以得出: $G = 1/R$ 及 $B = 1/X$, 然而实际情况并非如此,这样计算会导致结果错误。

用导纳表示时,第一件要做的事是归一化, $y = Y/Y_0$, 得出 $y = g + jb$ 。但是如何计算反射系数呢? 通过下面的式子进行推导:

种方法十分方便，它使我们不用建立一个新图。所有圆周的交点(等电导圆和等电纳圆)自然出现在点(-1, 0)。使用导纳圆图，使得添加并联元件变得很容易。在数学上，导纳圆图由下面的公式构造：

$$\Gamma_L = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{1-y}{1+y} = \frac{1-g-jb}{1+g+jb} \quad (\text{equ 3.1})$$

解这个方程

$$y = g + jb = \frac{1-\Gamma_L}{1+\Gamma_L} = \frac{1-\Gamma_r - j\Gamma_i}{1+\Gamma_r + j\Gamma_i} \quad (\text{equ 3.2})$$

$$g + jb = \frac{(1-\Gamma_r - j\Gamma_i)(1+\Gamma_r - j\Gamma_i)}{(1+\Gamma_r + j\Gamma_i)(1+\Gamma_r - j\Gamma_i)} = \frac{1-\Gamma_r^2 - \Gamma_i^2 - j2\Gamma_i}{1+\Gamma_r^2 + 2\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad (\text{equ 3.3})$$

接下来，令方程 3.3 的实部和虚部相等，我们得到两个新的独立的关系：

$$g = \frac{1-\Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{1+\Gamma_r^2 + 2\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad (\text{equ 3.4})$$

$$b = \frac{-2\Gamma_i}{1+\Gamma_r^2 + 2\Gamma_r + \Gamma_i^2} \quad (\text{equ 3.5})$$

从等式 3.4，我们可以推导出下面的式子：

$$g + g\Gamma_r^2 + 2g\Gamma_r + g\Gamma_i^2 = 1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2 \quad (\text{equ 3.6})$$

$$\Gamma_r^2 + g\Gamma_r^2 + 2g\Gamma_r + g\Gamma_i^2 + \Gamma_i^2 = 1 - g \quad (\text{equ 3.7})$$

$$(1+g)\Gamma_r^2 + 2g\Gamma_r + (g+1)\Gamma_i^2 = 1 - g \quad (\text{equ 3.8})$$

$$\Gamma_r^2 + \frac{2g}{g+1}\Gamma_r + \Gamma_i^2 = \frac{1-g}{1+g} \quad (\text{equ 3.9})$$

$$\Gamma_r^2 + \frac{2g}{g+1}\Gamma_r + \frac{g^2}{(g+1)^2} + \Gamma_i^2 - \frac{g^2}{(g+1)^2} = \frac{1-g}{1+g} \quad (\text{equ 3.10})$$

$$\left(\Gamma_r + \frac{g}{g+1}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \frac{1-g}{1+g} + \frac{g^2}{(1+g)^2} = \frac{1}{(1+g)^2} \quad (\text{equ 3.11})$$

$$\left(\Gamma_r + \frac{g}{g+1}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+g}\right)^2 \quad (\text{equ 3.12})$$

它也是复平面 (Γ_r, Γ_i) 上圆的参数方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (方程 3.12), 以 $(-g/g+1, 0)$ 为圆心, 半径为 $1/(1+g)$ 。

从等式 3.5, 我们可以推导出下面的式子:

$$b + b\Gamma_r^2 + 2b\Gamma_r + b\Gamma_i^2 = -2\Gamma_i \quad (\text{equ 3.13})$$

$$1 + \Gamma_r^2 + 2\Gamma_r + \Gamma_i^2 = -2\Gamma_i / b \quad (\text{equ 3.14})$$

$$\Gamma_r^2 + 2\Gamma_r + 1 + \Gamma_i^2 + \frac{2}{b}\Gamma_i = 0 \quad (\text{equ 3.15})$$

$$\Gamma_r^2 + 2\Gamma_r + 1 + \Gamma_i^2 + \frac{2}{b}\Gamma_i + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0 \quad (\text{equ 3.16})$$

$$(\Gamma_r + 1)^2 + (\Gamma_i + \frac{1}{b})^2 = \frac{1}{b^2} \quad (\text{equ 3.17})$$

同样得到 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ 型的参数方程(方程 3.17)。

求解等效阻抗

当解决同时存在串联和并联元件的混合电路时, 可以使用同一个史密斯圆图, 在需要进行从 z 到 y 或从 y 到 z 的转换时将图形旋转。

考虑图 8 所示网络(其中的元件以 $Z_0 = 50\Omega$ 进行了归一化)。串联电抗(x)对电感元件而言为正数, 对电容元件而言为负数。而电纳(b)对电容元件而言为正数, 对电感元件而言为负数。

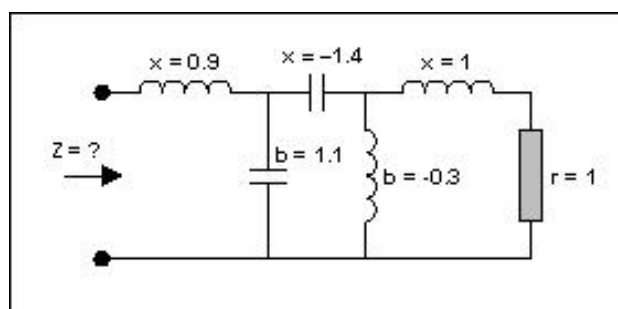


图 8. 一个多元件电路

这个电路需要进行简化(见图 9)。从最右边开始, 有一个电阻和一个电感, 数值都是 1, 我们可以在 $r=1$ 的圆周和 $l=1$ 的圆周的交点处得到一个串联等效点, 即点 A。下一个元件是并联元件, 我们转到导纳圆图(将整个平面旋转 180°), 此时需要将前面的那个点变成导纳, 记为 A'。现在我们将平面旋转 180° , 于是我们在导纳模式下加入并联元件, 沿着电导圆逆

顺时针方向(负值)移动距离 0.3, 得到点 B。然后又是一个串联元件。现在再回到阻抗圆图。

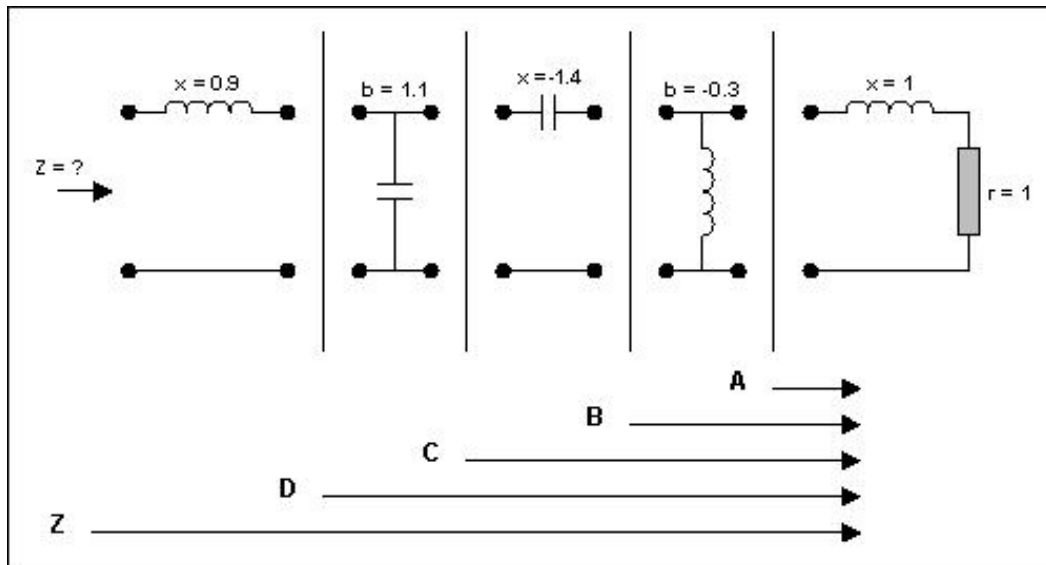


图 9. 将图 8 网络中的元件拆开进行分析

在返回阻抗圆图之前, 还必需把刚才的点转换成阻抗(此前是导纳), 变换之后得到的点记为 B', 用上述方法, 将圆图旋转 180°回到阻抗模式。沿着电阻圆周移动距离 1.4 得到点 C 就增加了一个串联元件, 注意是逆时针移动(负值)。进行同样的操作可增加下一个元件(进行平面旋转变换到导纳), 沿着等电导圆顺时针方向(因为是正值)移动指定的距离(1.1)。这个点记为 D。最后, 我们回到阻抗模式增加最后一个元件(串联电感)。于是我们得到所需的值, z, 位于 0.2 电阻圆和 0.5 电抗圆的交点。至此, 得出 $z=0.2 + j0.5$ 。如果系统的特性阻抗是 50Ω , 有 $Z = 10 + j25\Omega$ (见图 10)。

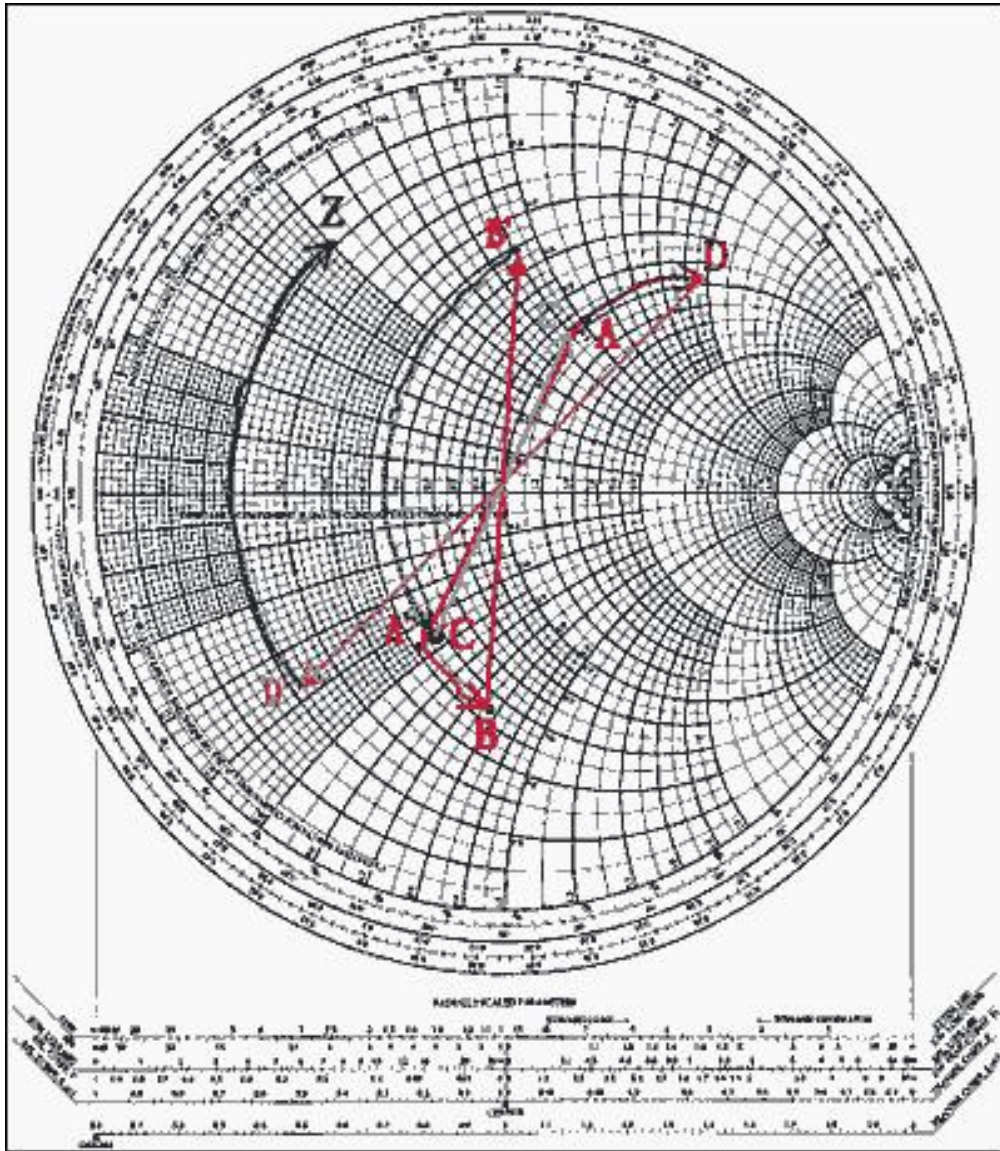


图 10. 在史密斯圆图上画出的网络元件

逐步进行阻抗匹配

史密斯圆图的另一个用处是进行阻抗匹配。这和找出一个已知网络的等效阻抗是相反的过程。此时，两端(通常是信号源和负载)阻抗是固定的，如图 12 所示。我们的目标是在两者之间插入一个设计好的网络已达到合适的阻抗匹配。

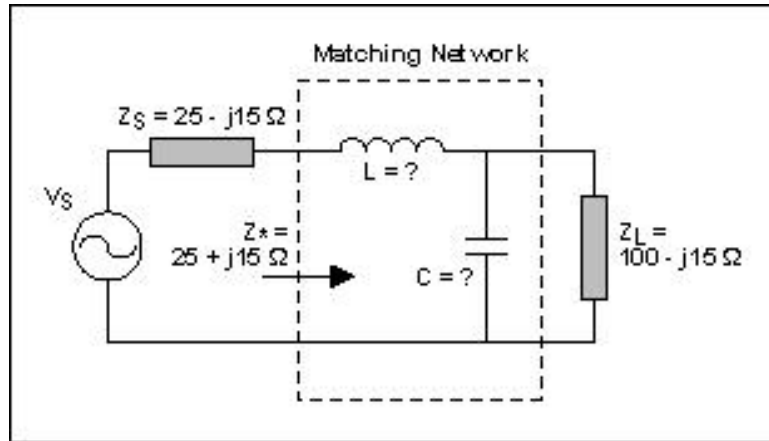


图 11. 阻抗已知而元件未知的典型电路

初看起来好像并不比找到等效阻抗复杂。但是问题在于有无限种元件的组合都可以使匹配网络具有类似的效果，而且还需考虑其它因素(比如滤波器的结构类型、品质因数和有限的可选元件)。

实现这一目标的方法是在史密斯圆图上不断增加串联和并联元件、直到得到我们想要的阻抗。从图形上看，就是找到一条途径来连接史密斯圆图上的点。同样，说明这种方法的最好办法是给出一个实例。

我们的目标是在 60MHz 工作频率下匹配源阻抗(Z_S)和负载阻抗(Z_L) (见图 12)。网络结构已经确定为低通, L 型(也可以把问题看作是如何使负载转变成数值等于 Z_S 的阻抗, 即 Z_S 复共轭)。下面是解的过程:

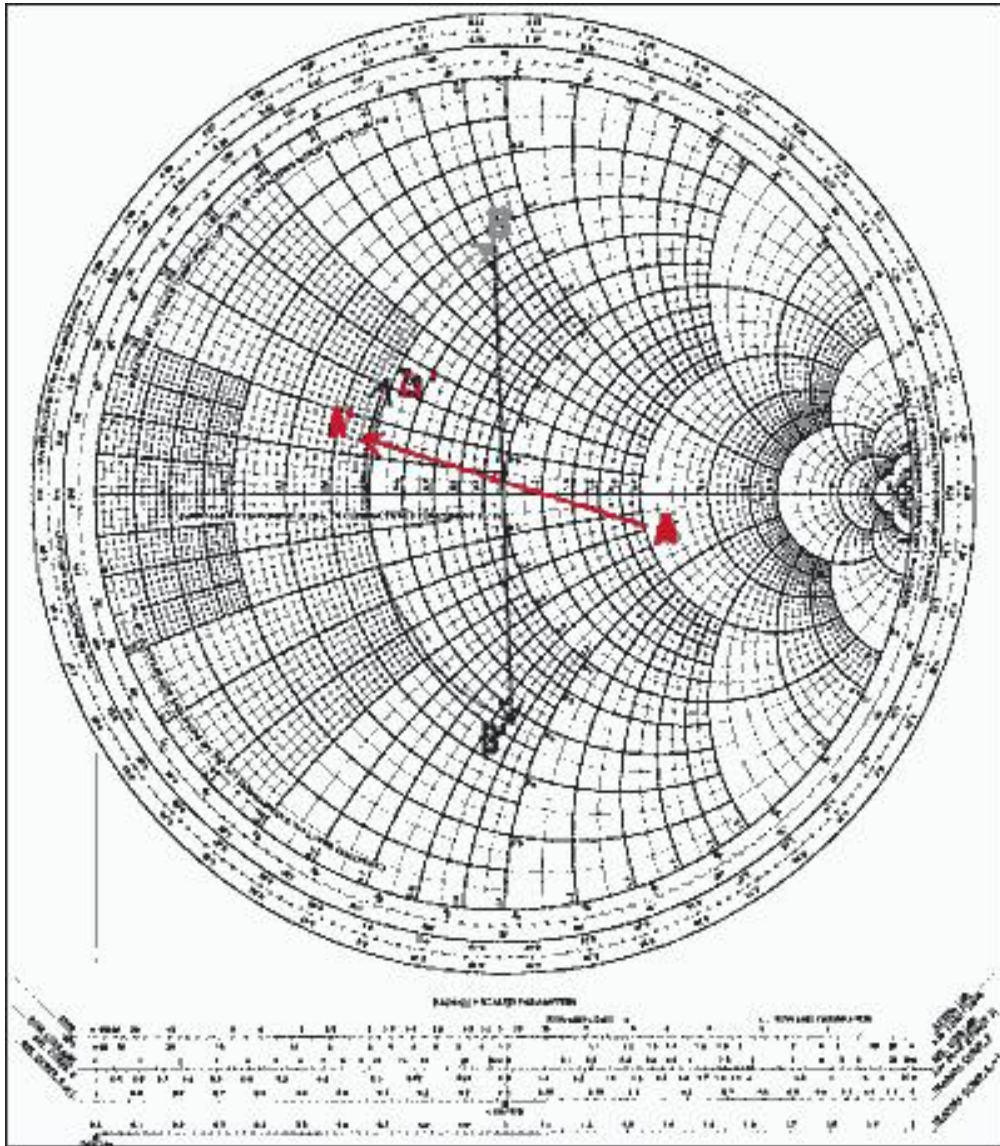


图 12. 图 11 的网络，将其对应的点画在史密斯圆图上

要做的第一件事是将各阻抗值归一化。如果没有给出特性阻抗，选择一个与负载/信号源的数值在同一量级的阻抗值。假设 Z_0 为 50Ω 。于是 $z_S = 0.5 - j0.3$, $z_{*S} = 0.5 + j0.3$, $Z_L = 2 - j0.5$ 。

下一步，在图上标出这两个点，A代表 z_L ，D代表 Z_{*S}

然后判别与负载连接的第一个元件(并联电容)，先把 z_L 转化为导纳，得到点A'。

确定连接电容 C 后下一个点出现在圆弧上的位置。由于不知道 C 的值，所以我们不知道具体的位置，然而我们确实知道移动的方向。并联的电容应该在导纳圆图上沿顺时针方向移动、直到找到对应的数值，得到点 B (导纳)。下一个元件是串联元件，所以必需把 B 转换到阻抗平面上去，得到 B'。B'必需和 D 位于同一个电阻圆上。从图形上看，从 A'到 D 只有一条路径，但是如果经过中间的 B 点(也就是 B')，就需要经过多次的尝试和检验。在找到

点 B 和 B'后, 我们就能够测量 A'到 B 和 B'到 D 的弧长, 前者就是 C 的归一化电纳值, 后者为 L 的归一化电抗值。A'到 B 的弧长为 $b = 0.78$, 则 $B = 0.78 \times Y_0 = 0.0156$ 姆欧。因为 $\omega C = B$, 所以 $C = B/\omega = B/(2\pi f) = 0.0156/(2\pi 607) = 41.4\text{pF}$ 。B 到 D 的弧长为 $x = 1.2$, 于是 $X = 1.2 \times Z_0 = 60\Omega$ 。由 $\omega L = X$, 得 $L = X/\omega = X/(2\pi f) = 60/(2\pi 607) = 159\text{nH}$ 。

总结

在拥有功能强大的软件和高速、高性能计算机的今天, 人们会怀疑在解决电路基本问题的时候是否还需要这样一种基础和初级的方法。

实际上, 一个真正的工程师不仅应该拥有理论知识, 更应该具有利用各种资源解决问题的能力。在程序中加入几个数字然后得出结果的确是件容易的事情, 当问题的解十分复杂、并且不唯一时, 让计算机作这样的工作尤其方便。然而, 如果能够理解计算机的工作平台所使用的基本理论和原理, 知道它们的由来, 这样的工程师或设计者就能够成为更加全面和值得信赖的专家, 得到的结果也更加可靠。

注:

[1] 定义终端接有负载的传输线上任意位置处的反射波电压 $\dot{U}_r(d)$ 与入射波电压 $\dot{U}_i(d)$ 之比为**电压反射系数**, 用以表示传输线上反射波的大小。电压反射系数为

$$\Gamma(d) = \frac{\dot{U}_r(d)}{\dot{U}_i(d)} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-j2\beta d}$$

式中 Z_L 为负载阻抗, Z_0 为特性阻抗, β 为波的相移常数 (传输线传播常数 $\gamma = \alpha + j\beta$ 的虚部), d 为以负载端为起点, 向信源端方向看去的距离。

故负载端处, $d=0$, 反射系数 $\Gamma_L = (Z_L - Z_0)/(Z_L + Z_0) = \Gamma_r + j\Gamma_i$

[2] 为什么说圆周上的点具有相同实部的阻抗? 因为在同一个圆上任取两点, 它们都具有相同的半径 $1/(1+r)$, 而 r 是归一化负载阻抗 $z_L = r + jx$ 的实部, 所以 r 相等, 即具有相同的实部。

[3] 在 $r=1$ 的这个圆的圆周上, 由于 $r = Z_L/Z_0 = 1$, 其负载阻抗实部与特性阻抗相等。(特性阻抗 Z_0 为一个实数, 而没有虚部。如前文所提及: “**为了减少未知参数的数量, 可以固化一个经常出现并且在应用中经常使用的参数。这里 Z_0 (特性阻抗) 通常为常数并且是实数, 是常用的归一化标准值。**”) 但是并不代表负载匹配, 因为还有负载阻抗还有虚部, 而特性阻抗的虚部为 0。只有在 $(0, 0)$ 这个点上, 反射系数 $\Gamma_L = \Gamma_r + j\Gamma_i$ 的实部和虚部都为 0, 反射系数 $\Gamma_L = 0$, 可知负载完全匹配。